

Leonardo Tinti
Instytut Fizyki, Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Autoreferat

1. CV

1.1 Dane Wnioskodawcy

1.2 Kwalifikacje

1.3 Historia Zatrudnienia

2. Osiągnięcia Naukowe

2.1 Tytuł Osiągnięcia Naukowego Zgłoszonego w Ramach Procedury Habilitacyjnej

2.2 Cykl Publikacji Związanych z Osiągnięciem Naukowym

2.3 Opis Celów Naukowych i Wyników Obecnych Publikacji

2.4 Podsumowanie

3. Inne Osiągnięcia Naukowe

3.1 Lista Pozostałych Publikacji (niezawartych w Osiągnięciu Naukowym)

3.2 Wnioski Końcowe

4. Bibliografia

1. CV

1.1 Dane Wnioskodawcy

Leonardo Tinti

1.2 Kwalifikacje

2013 r., Doktorat z Nauk Fizycznych, *Uniwersytet we Florencji, IT*, “Thermodynamics and the relativistic spin tensor”

2009 r., Magister, Fizyka, *Uniwersytet we Florencji, IT*

2006 r., Licencjat, Fizyka, *Uniwersytet we Florencji, IT*

1.3 Historia Zatrudnienia

10.2013 r. - 09.2016 r. Doktor Stażysta (Adiunkt), *Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach, PL*

10.2016 r. - 10.2017 r. Doktor Stażysta, *The Ohio State University, USA*

11.2017 r. - 10.2020 r. Doktor Stażysta, *Goethe University, DE*

11.2020 r. - obecnie Doktor Stażysta (Adiunkt), *Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach, PL*

Historia Finansowania

10.2016 r. - 07.2017 r. US-Italy Fulbright Scholarship, “*Toward a more accurate formulation of anisotropic hydrodynamics*” 13100 USD, Dodatkowe Fundusze na Stanowisko Postdoktoranckie w Ohio, 2017 r. - 2016 r.

06.2021 r. - 06.2025 r. NCN SONATA 16, “*Hydrodynamika Relatywistyczna w ekstremalnych warunkach bez ekspansji półklasycznych lub gradientowych*”, (36 miesięcy przedłużone do 48) 268200 PLN

Doświadczenie Dydaktyczne

2010 r. Ćwiczenia z Mechaniki Klasycznej i Termodynamiki, Zajęcia z Geologii, Florencja

2018 r. - 2019 r. Wykłady i Ćwiczenia, Kurs Hydrodynamiki Relatywistycznej dla Fizyków, Frankfurt

2019 r. - 2020 r. Opieka Naukowa nad Doktorantem Davide Rindori podczas jego wizyty na Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie, co zaowocowało publikacją [H7]

2021 r. - obecnie Opieka Naukowa nad Doktorantem Arthur Vereijken, UJK, Kielce

2. Osiągnięcia Naukowe

2.1 Tytuł Osiągnięcia Naukowego Zgłoszonego w Ramach Procedury Habilitacyjnej

Osiągnięć naukowym, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

”Uogólnienie ekspansji hydrodynamicznej dla układów ekstremalnych”

2.2 Cykl Publikacji Związanych z Osiągnięciem Naukowym

H1. L. Tinti, W. Florkowski, *Projection method and new formulation of leading-order anisotropic hydrodynamics*, Phys.Rev.C 89 (2014) 3, 034907

H2. L. Tinti, *(3 + 1)-dimensional framework for leading-order nonconformal anisotropic hydrodynamics*, Phys.Rev.C 92 (2015) 1, 014908

H3. L. Tinti, R. Ryblewski, W. Florkowski, M. Strickland, *Testing different formulations of leading-order anisotropic hydrodynamics*, Nucl.Phys.A 946 (2016) 29-48

H4. L. Tinti, *Anisotropic matching principle for the hydrodynamic expansion*, Phys.Rev.C 94 (2016) 4, 044902

H5. L. Tinti, A. Jaiswal, R. Ryblewski, *Quasiparticle second-order viscous hydrodynamics from kinetic theory*, Phys.Rev.D 95 (2017) 5, 054007

H6. L. Tinti, G. Vujanovic, J. Noronha, U. Heinz, *Resummed hydrodynamic expansion for a plasma of particles interacting with fields*, Phys.Rev.D 99 (2019) 1, 016009

H7. D. Rindori, L. Tinti, F. Becattini, D.H. Rischke, *Relativistic quantum fluid with boost invariance*, Phys.Rev.D 105 (2022) 5, 056003

H8. L. Tinti, *Quantum free-streaming: Out of equilibrium expansion for the free scalar fields*, Phys.Rev.D 108 (2023) 7, 076022

H9. L. Tinti, *Off-shell hydrodynamic expansion*, Phys.Rev.D 108 (2023) 3, 036015

2.3 Opis Celów Naukowych i Wyników Obecnych Publikacji

1. Wstęp

Hydrodynamika relatywistyczna jest uogólnieniem klasycznej hydrodynamiki do kowariantnej opisu relatywistycznego. W astrofizyce należy uwzględnić efekty nienaladowanej czasoprzestrzeni; jednak w kontekście zderzeń ciężkich jonów wystarczy zastosowanie szczególnej teorii względności. W tym ostatnim przypadku korekty relatywistyczne są konieczne z powodu szybkiej ekspansji oraz dużej różnicy w prędkościach względnych między różnymi częściami płynu. Dla ogólnego przeglądu zobacz Ref. [1].

W fizyce cząstek, prognozy dla eksperymentów zazwyczaj uzyskiwane są z formalizmu macierzy S . To znaczy, odpowiednio zrenormalizowana wartość oczekiwana próżni dla ciągów pól czasowo uporządkowanych, odpowiednio splecione funkcjami falowymi stanów asymptotycznych początkowych i końcowych. Choć formalizm ten odniósł sukces w innych sytuacjach, jest zbyt skomplikowany do zastosowania do opisu zderzeń ciężkich jonów. Główne komplikacje to aspekty nieperturbacyjne silnego oddziaływania oraz bardzo duża liczba stopni swobody, które należy uwzględnić. Dodatkowe uproszczenia fenomenologiczne są powszechnie stosowane, a jednym z nich jest, rzeczywiście, hydrodynamika relatywistyczna. Jest ona używana do połączenia początkowych etapów zderzenia z końcowymi. Kilka stopni swobody, mianowicie składniki zachowanych prądów, wystarczają do rekonstrukcji rozkładu pozycji i pędów cząstek w końcowych etapach, za pomocą wzoru Cooper-Frye. Nowoczesny przegląd tego opisu można znaleźć również w Ref. [2]. Ewolucja zachowanego prądu to zupełnie inny temat w porównaniu do macierzy rozpraszania, który można rozwiązać za pomocą innych narzędzi. Dodatkowe zachowane prądy, takie jak strumień barionowy, mogą być brane pod uwagę (i były brane pod uwagę), aby uzyskać dokładniejsze prognozy. Jednak tensor energii-pędu $T^{\mu\nu}$ jest zawsze uwzględniany. To znaczy, zachowany prąd lokalnego zachowania czteropędu $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nie wszystkie cząstki (lub pola) niosą ładunki, takie jak barionowy, elektryczny czy inne. Z drugiej strony, wszystkie niosą energię i pęd.

Hydrodynamika płynów doskonałych jest najprostszym założeniem w tym kontekście. To znaczy, tensor energii-pędu $T^{\mu\nu}$ może być dobrze przybliżony jedynie przez klasyczne stopnie swobody hydrodynamiczne lub, lepiej, ich relatywistyczne odpowiedniki. To znaczy, zamiast klasycznej prędkości, czteropęd u^μ : bezwymiarowa, znormalizowana do jedności $u_\mu u^\mu = 1$, wciąż mająca trzy stopnie swobody, jak w przypadku klasycznym, mimo iż jest czterowektorem. Właściwa gęstość energii $\mathcal{E}$, która jest uogólnieniem gęstości masy. Ciśnienie $\mathcal{P}$ (nie zmienia nazwy) stanowi piąty stopień swobody w hydrodynamice idealnej. Równania dynamiczne $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ są tylko cztery. Równanie stanu, łączące ciśnienie z gęstością energii, stanowi ostateczne (zwykle) równanie do zamknięcia układu (zamiast równań różniczkowych cząstkowych, jak w równaniach

zachowania) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Główna idea relatywistycznej hydrodynamiki idealnej polega na tym, że pochodne pojawiają się tylko z równań zachowania, równań ruchu, równoległe do klasycznego odpowiednika. Czteroprędkość jest jedynym kowariantnym wektorem, który może być użyty do zbudowania $T^{\mu\nu}$. Istnieje również tensor rzędu dwa, mianowicie tensor metryki czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności $g^{\mu\nu}$. Wyłączając pochodne, nie ma zbyt wielu kombinacji tych składników, które mogą tworzyć $T^{\mu\nu}$. W szczególności tylko jedna z nich daje równanie ciągłości i równanie Eulera w limicie nierelatywistycznym [3], innymi słowy, w limicie $\mathcal{E}/c^2 \approx \rho_m$ gęstość masy, i $\mathcal{P}/c^2 \approx 0$. W hydrodynamice płynów doskonałych tensor energii-pędu przyjmuje postać $T^{\mu\nu} = \mathcal{E} u^\mu u^\nu - \mathcal{P}(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)$. Jeśli rozważy się zachowane prądy wektorowe (barionowy, elektryczny itp.), to, stosując te same argumenty co wcześniej, muszą one być gęstością (skalarową) pomnożoną przez czteroprędkość. Równanie stanu, zazwyczaj zaczerpnięte z mechaniki statystycznej, łączy ciśnienie z gęstościami; właściwa gęstość energii, jak również inne, jeśli są uwzględnione w rozważaniach. W ten sposób liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych. Każdy nowy zachowany prąd wektorowy dodaje jeden stopień swobody i jedno równanie różniczkowe cząstkowe.

Liczba stopni swobody tensora symetrycznego rzędu dwóch, takiego jak $T^{\mu\nu}$, wynosi dziesięć. W ogólności jest o sześć stopni swobody więcej w porównaniu do przybliżenia płynów doskonałych. Aby być bardziej precyzyjnym, jeśli uznamy, że ciśnienie izotropowe nie musi pokrywać się z ciśnieniem w równowadze z mechaniki statystycznej, ciśnienie izotropowe jest podzielone na część idealną (wcześniej opisaną przez równanie stanu) oraz korektę ciśnienia objętościowego Π . Korzystając z definicji czteroprędkości Landaua, to jest znormalizowanej czasoprzestrzennej wartości własnej tensora fizycznego

$$u_\mu T^{\mu\nu} = \mathcal{E} u^\nu, \quad u_\mu u^\mu = 1, \quad (1)$$

właściwa gęstość energii jest zdefiniowana jako odpowiadająca jej wartość własna, możliwe jest rozłożenie każdego tensora, w tym $T^{\mu\nu}$, na część równoległą i prostopadłą względem u^μ . Nazywając $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ operatorem ortogonalnym, otrzymujemy

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{E} u^\mu u^\nu - (\mathcal{P} + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}. \quad (2)$$

Napięcie ścinające $\pi^{\mu\nu}$ jest częścią ortogonalną względem czteroprędkości, symetryczną i bez śladu. Podział na ciśnienie hydrostatyczne $\mathcal{P}$, część równowagi, oraz korektę ciśnienia objętościowego Π nie ma charakteru geometrycznego, lecz jest dokonany dla wygody. Ciśnienie hydrostatyczne samo w sobie nie stanowi dodatkowego stopnia swobody, ponieważ jest w rzeczywistości zdefiniowane przez relacje równowagi w najbardziej ogólnym przypadku. Efektywna temperatura (oraz potencjały chemiczne, jeśli rozważa się zachowane prądy wektorowe) jest tą, która dałaby fizyczną gęstość energii $\mathcal{E}(x)$ (oraz gęstość barionową i elektryczną), gdyby używać równań równowagi z mechaniki statystycznej. Z efektywnych parametrów intensywnych definiuje się następnie ciśnienie hydrostatyczne w każdym punkcie czasoprzestrzeni. Ciśnienie hydrostatyczne $\mathcal{P}$ jest zatem funkcją właściwej gęstości energii $\mathcal{E}$ (oraz, ewentualnie, innych gęstości rozważanych). Można rozpoznać w (2) wszystkie składniki przybliżenia płynów doskonałych, które nazywane są częścią idealną, reszta to część nie-idealna (nazywana również "korektami dyssypacyjnymi"). Oczywiście, prawa zachowania są niewystarczające do zapewnienia zamkniętego układu równań. Jednym ze sposobów postępowania jest założenie, że tylko część idealna przetrwa w równowadze. W globalnej jednorodnej równowadze, jak w wielkim zespole kanonicznym, gradienty znikają z powodu niezmienności obrotowej. Dla dowolnych małych odchyśleń od równowagi, a więc dowolnych małych gradientów, zakłada się, że korekty nie-idealne są liniowe względem gradientów. Na przykład $\pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu}$, w którym $\sigma^{\mu\nu}$ jest gradientem czteroprędkości w tym samym sektorze geometrycznym, co $\pi^{\mu\nu}$, ortogonalnym względem u^μ symetrycznym i bez śladu. Ta ekspansja gradientowa może być uogólniona do drugiego rzędu, na przykład w [4] a także inne podejścia mogą być użyte do wyprowadzenia relatywistycznej hydrodynamiki, na pierwszym i wyższych rzędach. Z relatywistycznej teorii kinetycznej [5], oraz z analizy strumienia entropii i produkcji entropii [6]. Wszystkie te podejścia zgadzają się co do ogólnej postaci równań hydrodynamiki lepkościowej drugiego rzędu, ale nie co do wartości współczynników transportowych. Jeśli przyjmie się hydrodynamikę lepkościową drugiego rzędu jako etap pośredni w modelach zderzeń ciężkich jonów,

możliwe jest również przeprowadzenie analizy bayesowskiej na podstawie danych eksperymentalnych, aby wybrać najbardziej odpowiednie wartości współczynników transportowych, zobacz na przykład Ref. [7].

Pomimo zgodności danych z przewidywaniami uzyskanymi za pomocą modeli, które uwzględniają ewolucję hydrodynamiczną, pozostaje ważny problem teoretyczny. Wymóg małych gradientów dla stopni swobody hydrodynamicznych (rozszerzenie gradientowe) oraz małych odchyłeń od lokalnej równowagi (podejście entropii) wydaje się być w sprzeczności z wynikami numerycznymi uzyskanymi z symulacji. Dla szybko rozszerzającego się układu w kierunku podłużnym zarówno gradienty, jak i korekty ciśnienia podłużnego mają tendencję do bycia dużymi w porównaniu z wkładem idealnym. Dzieje się tak przez dużą część ewolucji. Z tego powodu naturalnie pojawia się pytanie, czy hydrodynamikę można uznać za wiarygodną w zderzeniach jonów ciężkich. Ponadto, jako pytania pokrewne, można zastanawiać się, jak uogólnić to podejście lub jak wyjaśnić jego moc predykcijną mimo dużych gradientów i odchyłeń od równowagi. Jednym ze sposobów rozwiązania problemu było wprowadzenie hydrodynamiki anizotropowej. Podstawową koncepcją jest deformacja funkcji rozkładu w lokalnej równowadze, aby uwzględnić (przynajmniej część) nie-idealnych poprawek. Na przykład, nazywając odpowiednio pęd równoległy $p_{\parallel}$ i poprzeczny $p_{\perp}$ częścią pędu ortogonalną i równoległą względem osi wiązki, rozkład Boltzmanna dla cząsteczek bezmasowych można zapisać jako

$$f(x, \mathbf{p}) = e^{-\frac{p}{T}} = e^{-\sqrt{\frac{p_{\perp}^2}{T^2} + \frac{p_{\parallel}^2}{T^2}}}. \quad (3)$$

Można wprowadzić dwie oddzielne skale pędu, czyniąc rozkład anizotropowym

$$f(x, \mathbf{p}) = e^{-\sqrt{\frac{p_{\perp}^2}{\lambda_{\perp}^2} + \frac{p_{\parallel}^2}{\lambda_{\parallel}^2}}}. \quad (4)$$

Jest to, oczywiście, zgodne z lokalnym rozkładem równowagi (w limicie Boltzmanna) dla $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel} = T$. W kontekście tzw. symetrii Bjorkena, czyli niezmienności podłużnego boost, homogeniczności w płaszczyźnie poprzecznej oraz niezmienności odbicia osiowego w kierunku podłużnym, wystarczające jest to, aby odtworzyć każdą nie-idealną część tensora energii-pędu dla układu bezmasowego. Funkcja rozkładu taka jak (4) zapewnia związek między gęstością energii, ciśnieniem poprzecznym i podłużnym. Przypomina to przypadek hydrodynamiki płynów doskonałych, z równaniem stanu łączącym zarówno gęstość energii, jak i ciśnienie z efektywną temperaturą, a więc łącząc je ze sobą. Mając jedną dodatkową skalę pędu, nawet w przypadku symetrii Bjorkena, konieczne jest dodanie dodatkowego równania, aby uzyskać rozwiązanie. Początkowo zostało to zrobione niezależnie przez dwie grupy. W jednym przypadku, korzystając z ansatzu dla produkcji entropii [8]. W drugim przypadku, stosując zerowy moment równania Boltzmanna [9] w przybliżeniu czasu relaksacji, Relaxation Time Approximation (RTA). W obu przypadkach można wykazać, że równania ruchu redukują się do hydrodynamiki o lepkości drugiego rzędu w limicie bliskim równowagi. Jednak podejście to ma jeszcze inną dyskretną zaletę. Redukuje się do ewolucji swobodnego strumienia (gaz idealny) wielkości hydrodynamicznych w granicy braku oddziaływań (duży czas relaksacji).

Publikacje związane z osiągnięciami naukowymi poświęcone są uogólnianiu i wyjaśnianiu zachowania hydrodynamicznego ekstremalnych układów powstających w zderzeniach jonów ciężkich. Zaczynając od mojego osobistego wkładu w hydrodynamikę anizotropową, a następnie wykraczając poza tło kinetyczne wymagane w wcześniejszych pracach.

Poniżej przedstawiam wyniki związane z osiągnięciami naukowymi oraz opisuję etapy prowadzące do ich uzyskania. Szczegóły dotyczące metod oraz dyskusja na temat subtelniejszych kwestii znajdują się w odpowiednich publikacjach.

2. Hydrodynamika Anizotropowa

Publikacje [H1,H2,H3,H4] stanowią mój główny wkład w tematykę hydrodynamiki anizotropowej (aHydro). Opracowałem oryginalne argumenty, uogólniłem ansatz dla tła anizotropowego rozkładu

funkcji i poprawiłem zgodność z tłem kinetycznym, stosując nowe metody do zamknięcia układu równań aHydro.

W pierwszym artykule [H1] przepracowałem ramy aHydro. Oprócz wygodnego przemianowania parametrów, co upraszcza ostateczne wzory, zaproponowałem nowy sposób wyciągania dodatkowego równania ruchu. Zamiast ansatzu dla produkcji entropii, jak w [8], lub używania zerowego momentu równania Boltzmanna, jak w [9], postanowiłem skorzystać z drugiego momentu. Zaczynając od relatywistycznego równania Boltzmanna

$$p^\mu \partial_\mu f(x, \mathbf{p}) = \mathcal{C}[f], \quad (5)$$

jego momenty to kowariantne względem Lorentza całki po pędach $\int_{\mathbf{p}}$ iloczynu czteropędowych wektorów razy równanie. Tak więc n -ty moment ma postać

$$\partial_\mu \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} f = \int_{\mathbf{p}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} \mathcal{C}[f]. \quad (6)$$

Zerowy moment odpowiada dywergencji wektora liczby cząstek, to znaczy, szybkości produkcji cząstek, która musi wynosić zero dla zderzeń sprężystych. Pierwszy moment odpowiada lokalnemu zachowaniu czteropędu. Ten tensor naprężenia-energii w relatywistycznej teorii kinetycznej ma postać $T^{\mu\nu} = \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^\nu f$. Jego dywergencje sumują się do zera dla izolowanego układu, stąd $\int_{\mathbf{p}} p^\nu \mathcal{C} = 0$. Drugi moment równania Boltzmanna to równanie tensorowe drugiego rzędu.

$$\partial_\lambda \int_{\mathbf{p}} p^\lambda p^\mu p^\nu f = \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^\nu \mathcal{C}, \quad (7)$$

Dla wolnych indeksów μ i ν można, kierując się zasadą geometryczną, przyjąć ten sam sektor geometryczny, co stopnie swobody zmiennych, które nas interesują.

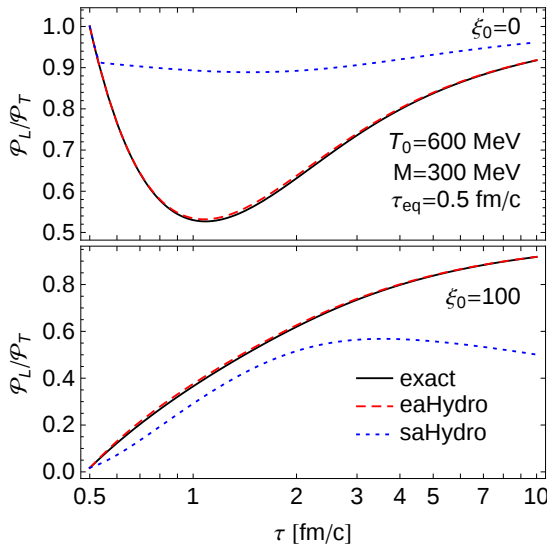


Figure 1: *Ewolucja anizotropii ciśnienia dla masywnego gazu. Czerwona ciągła linia to rozwiązanie kinetyczne. Czerwona przerywana linia to nowatorskie podejście do aHydro, a niebieska linia kropkowana to starsze podejście.*

Mianowicie, dla korekcji ciśnienia ścinającego $\pi^{\mu\nu}$, część przestrzenną, symetryczną i bez śladu. W [H1] rozważany jest jedynie przypadek gazu konformalnego (cząstki bez masy) oraz symetryczne względem osi i niezmiennie względem przyspieszenia wzdłużnej rozprężenia. Równanie zachowuje dodatniość produkcji entropii, odzyskuje limit swobodnego przepływu w limicie zerowego czasu relaksacji oraz reprodukuje równania ruchu hydrodynamiki drugiego rzędu Israella-Stewarta w limicie małych odchyżeń od lokalnej równowagi.

W publikacji [P4] przetestowaliśmy nowy zestaw równań. Osiągnięto istotną poprawę w reprodukcji anizotropii ciśnienia. Zostało to zrealizowane przy użyciu tego samego czasu relaksacji dla aHydro oraz dla podstawowej teorii kinetycznej, w przeciwieństwie do wcześniejszego podejścia opartego na zerowym momencie [10].

Na Rysunku 1 znajduje się najbardziej uderzający wykres z publikacji [P4]. Czas początkowy (w układzie Milne'a) oraz efektywna temperatura wynoszą odpowiednio $\tau_0 = 0.5$ fm/c i $T_0 = 600$ MeV. Masa cząstki to $M = 300$

MeV/c^2 . Czas relaksacji $\tau_{\text{eq}} = 0.5 \text{ fm}/c$ jest stałą liczbą, a nie funkcją temperatury, a ξ_0 jest parametrem, który ustala początkową anizotropowość (jak wyjaśniono w [P4]).

Starsze podejście, które było bardzo skuteczne dla cząstek bez masy, w rzeczywistości stanowiło istotną poprawę w porównaniu do przepisu Israela-Stewart [10], już nie jest ani jakościowo, ani ilościowo dobre, podczas gdy nowe podejście dla aHydro bardzo dobrze reprodukuje anizotropowość ciśnienia.

Korekta ciśnienia objętościowego, jeśli jest mała w porównaniu do naprężeń ścinających, nie jest reprodukowana poprawnie. Można to łatwo zrozumieć, ponieważ w [P4] nie rozszerzyliśmy ansatzu aHydro o dodatkowy stopień swobody dla korekty ciśnienia objętościowego i, w związku z tym, nie wprowadziliśmy nowego równania ruchu, które zajmowałoby się jego ewolucją.

Artykuł [H2] stanowi następny logiczny krok. Mianowicie, uogólnienie nowego ansatzu aHydro, aby uwzględnić wszystkie hydrodynamiczne stopnie swobody. W szczególności, usunięcie wszelkich upraszczających założeń dotyczących symetrii ekspansji. To znaczy, uwzględnione są wszystkie hydrodynamiczne stopnie swobody: gęstość energii i czteroprędkość z hydrodynamiki płynu doskonałego, a także wszystkie składowe naprężeń ścinających $\pi^{\mu\nu}$ oraz korekty ciśnienia objętościowego Π . Drugi moment równania Boltzmanna może dostarczyć wszystkich niezbędnych równań dla dodatkowych stopni swobody. W rzeczywistości istnieje więcej niż jedna opcja, aby uzyskać równania dla objętości. Ogólnie rzecz biorąc, podążając za tym samym geometrycznym przepisem, każda kombinacja skalarna może dostarczyć równanie dla objętości, a każda symetryczna, przestrzenna i śladowa kombinacja dla naprężeń ścinających.

W artykule [H3] przeprowadziliśmy testy numeryczne, które dały dość zaskakujące wyniki. Każda z formuł aHydro lepiej odwzorowuje anizotropię temperatury i ciśnienia niż hydrodynamika lepkości drugiego rzędu. Było to raczej oczekiwane, zwłaszcza dla większej lepkości (bliżej gazu idealnego niż płynu doskonałego), ponieważ aHydro odwzorowuje limit swobodnego przemieszczania się. Jednakże, kwantytatywna zgodność przy niskiej lepkości nie jest znacznie lepsza niż w przypadku hydrodynamiki lepkości, nawet przy dużych gradientach i korektach ciśnienia. Częściowo wynika to z użycia najnowszego sformułowania hydrodynamiki lepkości drugiego rzędu, wprowadzonej w [11]. Ta ostatnia była już znana z lepszego dopasowania do wyników kinetycznych niż sformułowanie Israel-Stewart, używana do porównań, np. w [10]. Ponadto nowe sformułowanie hydrodynamiki lepkości drugiego rzędu lepiej odwzorowuje ewolucję objętościową, niezależnie od sformułowania aHydro. Jest to bardziej zagadkowe, ponieważ aHydro lepiej odwzorowuje korekcie ciśnienia ścinającego, a ze względu na sprzężenie między naprężeniami ścinającymi a objętościowymi, mają one tendencję do bycia ważnymi źródłami ewolucji Π . Dodatkowo sprawdziliśmy, jak dobrze każda hydrodynamika drugiego rzędu pochodząca z aHydro odwzorowuje wyniki kinetyczne. Udowodniłem już w [H2], że nowe formuły aHydro kończą się na hydrodynamicie lepkości drugiego rzędu w granicy bliskiej równowadze. W ten sposób każda procedura aHydro dostarcza zbioru współczynników transportowych. Nawet jeśli same współczynniki są bardzo różne, wynikająca z tego preskrypcja hydrodynamiczna dobrze odwzorowuje dane kinetyczne. Gorsza niż aHydro i najlepsza hydrodynamika lepkości, ale nie o dużą różnicę.

Najwyraźniej pomysł anizotropowej aproksymacji pełnej funkcji rozkładu nie wystarcza, by uzyskać poprawę w stosunku do hydrodynamiki drugiego rzędu. Korekcie ciśnienia traktowane są nieliniowo, ale wybór równań jest również kluczowy.

3. Metoda Momentów

Proponowane przeze mnie rozwiązanie, inspirowane podobnymi pracami z zakresu hydrodynamiki lepkiej (już wspomniane [11] lub, bardziej ogólnie [12]), polega na użyciu metody momentów do wybrania równań ruchu. Podstawowa idea tej aplikacji metody polega na zachowaniu dokładnych równań z teorii kinetycznej tak długo, jak to możliwe, przybliżając je dopiero na końcu.

Głównym narzędziem dla tej wersji metody momentów jest manipulowanie równaniem Boltzmanna w relatywistycznej teorii. Niezależnie od specyficznej formy jądra kolizyjnego oraz szczególnej definicji czteroprędkości płynu u^μ (np. definicja Landaua (1)). Korzystając ze wspólnych notacji $p^\mu \partial_\mu f = p \cdot \partial f$ oraz $u^\mu \partial_\mu f = u \cdot \partial f = \dot{f}$ i $\nabla^\mu f = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu f$, możliwe jest zastosowanie następującej dekompozycji

$$p \cdot \partial f = \mathcal{C}[f], \quad \Rightarrow \quad (p \cdot u) \dot{f} + p \cdot \nabla f = \mathcal{C}[f], \quad \Rightarrow \quad \dot{f} = -\frac{p \cdot \nabla f}{(p \cdot u)} + \frac{\mathcal{C}[f]}{(p \cdot u)}. \quad (8)$$

Bardziej ogólnie, w relatywistycznej hydrodynamice powszechnie stosowaną notacją jest używanie kropki dla pochodnej współrzędnej $\dot{\mathcal{O}}^{\mu_1 \dots \mu_n} = u^\mu \partial_\mu \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_n}$, a dla gradientu ortogonalnego do kierunku czteroprędkości używa się symbolu nabla $\nabla^\mu \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ dla dowolnego tensora $\mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_n}$. Jeśli weźmie się moment tensora funkcji rozkładu (a nie samego równania Boltzmann, jak pokazano wcześniej)

$$\int_{\mathbf{p}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} f, \quad (9)$$

można użyć prawej strony równania (8), aby uzyskać dokładną ewolucję momentu tensora. Jest to szczególnie interesujące w przypadku zastosowania do samego tensora energii-pędu

$$T^{\mu\nu} = \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^\nu f, \quad \Rightarrow \quad \dot{T}^{\mu\nu} = - \int_{\mathbf{p}} \frac{p^\mu p^\nu p^\alpha}{(p \cdot u)} \nabla_\alpha f + \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^\nu \mathcal{C}[f]. \quad (10)$$

Jego projekcja wzdłuż czteroprędkości to po prostu inny sposób zapisania lokalnego zachowania czteropędu $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, natomiast projekcja ortogonalna dostarcza sześć dokładnych równań dla ewolucji w czasie $\pi^{\mu\nu}$ i Π . Korzystając z notacji

$$\mathfrak{f}_r^{\mu_1 \dots \mu_s} = \Delta_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Delta_{\nu_s}^{\mu_s} \int_{\mathbf{p}} (p \cdot u)^r p^{\nu_1} \dots p^{\nu_s} f, \quad \text{and} \quad \mathcal{O}^{\langle \mu \rangle \dots} = \Delta_\nu^\mu \mathcal{C}^{\nu \dots}, \quad (11)$$

tensor ciśnienia przyjmuje postać

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} \doteq - \left(\mathcal{P} + \Pi \right) \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} = \int_{\mathbf{p}} p^{\langle \mu \rangle} p^{\langle \nu \rangle} f = \mathfrak{f}_0^{\mu\nu}. \quad (12)$$

W podobny sposób, odpowiednia gęstość energii przyjmuje postać $\mathcal{E} = \mathfrak{f}_2$. Zatem, biorąc projekcję ortogonalną prawej strony równania (10), wyciągając pochodne z całki i po wykonaniu kilku przekształceń algebraicznych, otrzymuje się dokładną formułę

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}^{\langle \mu \rangle \langle \nu \rangle} - \int_{\mathbf{p}} \frac{p^{\langle \mu \rangle} p^{\langle \nu \rangle}}{(p \cdot u)} \mathcal{C}[f] &= 2 \left(\mathcal{P} + \Pi \right) \sigma^{\mu\nu} + \frac{5}{3} \theta \left(\mathcal{P} + \Pi \right) \Delta^{\mu\nu} - \frac{5}{3} \theta \pi^{\mu\nu} + 2 \pi_\alpha^{(\mu} \sigma^{\nu)\alpha} \\ &\quad - 2 \pi_\alpha^{(\mu} \omega^{\nu)\alpha} - \nabla_\alpha \mathfrak{f}_{-1}^{\alpha \langle \mu \rangle \langle \nu \rangle} - \left(\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta \Delta_{\alpha\beta} \right) \mathfrak{f}_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}, \end{aligned} \quad (13)$$

znak klamrowych nawiasów na pojedynczym indeksie reprezentuje część ortogonalną względem u^μ , to znaczy $\mathcal{O}^{\langle \mu \rangle \dots} = \Delta_\nu^\mu \mathcal{O}^{\nu \dots}$. Nawiasy wokół wielu indeksów oznaczają ich symetryczną kombinację. Na przykład $\mathcal{O}^{(\mu\nu) \dots} = \frac{1}{2} (\mathcal{O}^{\mu\nu \dots} + \mathcal{O}^{\nu\mu \dots})$.

Usunięcie śladu z równania (13) daje ewolucję czasową korekty ciśnienia ścinającego $\pi^{\mu\nu}$, podczas gdy ślad daje ewolucję ciśnienia objętościowego Π .

Jak można od razu zauważyć, większość sprzężeń dla ewolucji tensorów ciśnienia jest związana z samymi stopniami swobody hydrodynamicznymi, to znaczy, z komponentami $T^{\mu\nu}$ oraz gradientami czteropędu. Notacja ta jest standardową dekompozycją Landaua stosowaną w hydrodynamice

$$\partial_\mu u_\nu = u_\mu \dot{u}_\nu + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \theta \Delta^{\mu\nu}, \quad (14)$$

ponieważ $\dot{u}^\mu$ to przyspieszenie, a ścinanie $\sigma_{\mu\nu}$ jest częścią traceless (pozbawioną śladu), przestrzenną i symetryczną, wrotność $\omega_{\mu\nu}$ jest częścią przestrzenną i antysymetryczną, a rozprężenie skalarne to $\theta = \nabla_\mu u^\mu = \partial_\mu u^\mu$. Jedynym możliwym źródłem sprzężenia z niehydrodynamicznymi stopniami swobody są: składnik z jądra kolizyjnego $\mathcal{C}[f]$, oraz tensory rzędu trzeciego i czwartego w prawej stronie równania (13). Jest to dość jasne dla części związanej ze ścinaniem, ale dotyczy to również części związanej z ciśnieniem masywnym (bulk). W tym ostatnim przypadku, oprócz składnika

Ŗ po lewej stronie, istnieje również $\dot{\mathcal{P}}$, a ta pochodna nie pojawia się bezpośrednio w lokalnego zachowaniu czteropędu. W związku z tym mogłoby się wydawać, że nie można jej powiązać z hydrodynamicznymi stopniami swobody oraz gradientami czteropędu, jak to zwykle bywa w hydrodynamice. W rzeczywistości, przypominając, że ciśnienie hydrostatyczne nie jest niezależnym stopniem swobody, ale jest uzyskiwane z równania stanu w równowadze termodynamicznej, można to zrobić. Właściwa gęstość energii daje efektywną temperaturę, którą można by uzyskać w tym punkcie, gdyby układ był w globalnej równowadze. Ciśnienie hydrostatyczne $\mathcal{P}$ jest następnie wyciągane z ciśnienia izotropowego, jest to ciśnienie, jakie układ miałby w globalnej równowadze z temperaturą równą efektywnej temperaturze. Dlatego lokalne $\mathcal{P}$ jest funkcją efektywnej temperatury, a więc właściwej gęstości energii $\mathcal{P}(\mathcal{E})$. Korzystając z definicji relatywistycznej prędkości dźwięku c_s

$$c_s^2 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{E}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathcal{P}} = c_s^2 \dot{\mathcal{E}}, \quad (15)$$

a kontrakcja $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ z u_ν daje

$$\dot{\mathcal{E}} = -\theta \left(\mathcal{E} + \mathcal{P} + \Pi \right) + \sigma_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu}. \quad (16)$$

W związku z tym, pochodna współrzędnych lokalnych ciśnienia hydrostatycznego dostarcza jedynie dodatkowych sprzężeń między hydrodynamicznymi stopniami swobody w równaniu ewolucji objętościowej.

Jądro kolizyjne samo w sobie zanika w granicy swobodnego strumienia, ale wyższe rzędy tensorów nie są trywialne. Jedno ze źródeł sprzężeń z nie-hydrodynamicznymi stopniami swobody pozostaje również w gazie idealnym. Jak szczegółowo wyjaśniono w Ref. [12], wyższe rzędy tensora nie są całkowicie niezależne od hydrodynamicznych stopni swobody, ale zawierają również prawdziwe nowe stopnie swobody. W [H4] użyłem przybliżenia aHydro pełnej funkcji rozkładu w wyższych rzędach tensorów $f_{-1}^{\alpha\mu\nu}$ i $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$, pod warunkiem, że jądro kolizyjne traktowane jest w Przybliżeniu Czasu Relaksacji (RTA)

$$\mathcal{C}[f] = -\frac{(p \cdot u)}{\tau_{\text{eq}}} \left(f - e^{-\frac{(p \cdot u)}{T}} \right), \quad (17)$$

człon kolizyjny zapisuje się jako

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{p^{(\mu} p^{(\nu)}}{(p \cdot u)} \mathcal{C}[f] = \frac{1}{\tau_{\text{eq}}} \left(\Pi \Delta^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu} \right), \quad (18)$$

i nie sprzęga się z nienahydrodynamicznymi stopniami swobody. Żadne dalsze przybliżenia nie są potrzebne. Przybliżenie aHydro wyższych tensorów rang reprodukuje dokładnie ich zależność od stopni swobody hydrodynamicznych i zapewnia nieliniowe przybliżenie dla pozostałych składników. W ten sposób zamyka się układ równań dla aHydro. W granicy bliskiej równowadze odzyskuje drugorzędową hydrodynamikę lepka z współczynnikami transportu z [11], które jak dotąd najlepiej odwzorowują wyniki teorii kinetycznej w RTA.

Z przeprowadzonych przeze mnie testów numerycznych wynika, że nowa receptura aHydro z [H4] systematycznie lepiej odwzorowuje wyniki teorii kinetycznej niż najlepsza receptura drugorzędowej hydrodynamiki lepkiej oraz starsza wersja aHydro. Rzeczywiście, to nowsze przybliżenie aHydro na wiodącym poziomie jest o wiele bliższe w precyzji do przybliżenia aHydro na poziomie Next to Leading Order (NLO) lepkiej hydrodynamiki, zaprezentowanego w [13].

Pomimo uderzającego sukcesu, można się zastanowić, dlaczego hydrodynamika tak dobrze odwzorowuje wyniki kinetyczne. Bardziej precyzyjnie, wersja z [11] tak robi, w przeciwieństwie do poprzednich podejść, w których aHydro zapewniało znacznie większą poprawę [10], a nowa wersja [H4] to kolejna znacząca poprawa. Wszystko to, pomimo tego, że w [11] wyraźnie wspomniano o ekspansji gradientowej i niehydrodynamicznych składnikach rzędu gradientów. Ten paradoks można wyjaśnić, patrząc na samą metodę momentów, sprzężoną z tłem i ograniczeniami symetrii. Zarówno [H4], jak i hydrodynamika w [11] stanowią szczególną aplikację metody momentów.

Przybliżenie czasu relaksacji zapewnia, że składnik kolizyjny po lewej stronie równania (8) jest odwzorowywany dokładnie w obu przybliżeniach. Rozważana ekspansja $(0+1)$ -wymiarowa (tzw. symetria Bjorkena) tnie tensor trzeciego rzędu po prawej stronie, sposób jego przybliżenia w ogólnym przypadku nie ma znaczenia: z powodu symetrii ekspansji w testach numerycznych tensor ten musi zanikać, jego efekty nie mogą być widoczne w takich testach numerycznych w wymiarze $0+1$. Pozostaje tensor czwartego rzędu $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$. W obu przypadkach, hydrodynamiki lepkościowej oraz nowego aHydro, części tego tensora, które zależą od momentów hydrodynamicznych, są reprodukowane poprawnie. Jedynym przybliżeniem jest reszta. Zgodnie z formalizmem w [12] chodzi o część nieredukowalną tensora. To właśnie ta część, w której stosowane przybliżenie ma znaczenie i stanowi źródło różnic między aHydro a hydrodynamiką. W tym momencie można zauważyć, że duże gradienty nie mają takiego znaczenia w tym formalizmie, ponieważ mnożą zarówno terminy związane z momentami hydrodynamicznymi, jak i (nieredukowalną część) $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$. W rzeczywistości, duże korekcje nie-idealne w $T^{\mu\nu}$ w porównaniu do $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$ mogą oznaczać, że przybliżenie tego ostatniego jest mniej istotne. Samokompensacja $T^{\mu\nu}$ w ewolucji jego nie-idealnych komponentów jest większa z tego powodu. Ostatecznie najważniejsze jest to, jak dobrze odwzorowywane jest całkowite źródło ewolucji, a nie tylko tensor $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$. Dopóki terminy związane z hydrodynamicznymi stopniami swobody bezpośrednio się sumują, dla każdego sektora geometrycznego, każde przybliżenie przy użyciu metody momentów i równań (8) powinno być odpowiednie. W rzeczywistości, jeśli poprawki nie-idealne są duże, gradienty są duże, ale nadal źródła hydrodynamiczne sumują się bezpośrednio, względny wpływ przybliżeń reszkowych tensorów powinien być mały. Z drugiej strony, jeśli się one kompensują (jak to ma miejsce częściowo w przypadku objętości), szczegóły przybliżenia stają się znacznie ważniejsze. Może to wyjaśniać nieoczekiwaną dokładność [11], mimo że pierwotnie była ona traktowana jako przybliżenie małych gradientów, bliskie płynowi doskonałemu

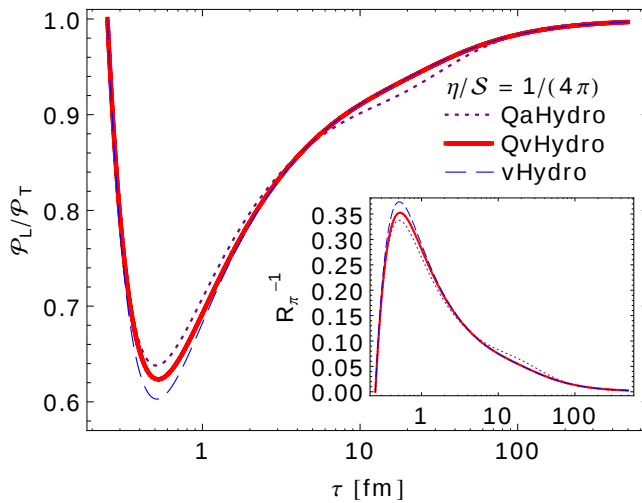


Figure 2: *Ewolucja anizotropii ciśnienia, realistyczne równanie stanu [H5].*

równanie stanu. Równowagowa gęstość energii $\mathcal{E}_{\text{eq}}(T)$ i ciśnienie $\mathcal{P}_{\text{eq}}(T)$ to dwa stopnie swobody, a jedna masa zależna od temperatury $m(T)$ nie wystarcza, aby dopasować obie jednocześnie. Częstym wyborem, który przyjmujemy w [H5], jest przyjęcie, że równowagowy "bag" ma postać $B_{\text{eq}}^{\mu\nu} = B(T)g^{\mu\nu}$. Rozważania symetrii w homogenicznej globalnej równowadze zabraniają niediagonalnych części równowagowego "baga" i wymagają izotropowości w przestrzennej części. To oznacza, że nie wyklucza to dwóch funkcji skalarnych. Dotyczy to niezależnie od zespolu, kanonicznego, mikrokannonicznego czy innego. Użycie jednego skalaru zależnego od temperatury w postaci "baga" jest wygodnym uproszczeniem, ponieważ nie jest wymagane posiadanie dwóch różnych równowagowych "bagów" (na tym poziomie) do dopasowania jakiegokolwiek realistycznego

To oczekiwanie jest dodatkowo potwierdzone w [H5]. W tej pracy przekształcamy podejście hydrodynamiczne z [11], aby uwzględnić efekty realistycznego równania stanu. Tło zostało zmienione. Zamiast prostego gazu, rozważono kwazicząstkę o masie zależnej od medium. Wymagany jest składnik bag $B^{\mu\nu}$, który jest dodatkowym składnikiem w $T^{\mu\nu}$ oprócz składnika kinetycznego wynikającego z kwazicząstek

$$T^{\mu\nu} = \int_{\mathbf{p}} p^\mu p^\nu f + B^{\mu\nu}. \quad (19)$$

Składnik bag, nawet jeśli można go uzasadnić z mikroskalowych powodów, jest potrzebny z praktycznego, fenomenologicznego powodu. W szczególności, równowagowy "bag" jest wymagany, aby dopasować ogólne (kanoniczne)

równania stanu. Nierównowagowa (ogólnie tensorowa) część $B^{\mu\nu}$ wprowadzona jest, ponieważ zakładając RTA, użycie przepisu Landaua dla czterowektorów już nie wystarcza, aby zapewnić lokalne zachowanie czteropędu, jak ma to miejsce w przypadku gazu relatywistycznego (stąd cząstki, a nie quasi-cząstki). Nierównowagowy "bag" był już rozważany i używany w kontekście aHydro [14, 15].

Struktura tensorowa, którą wprowadził-

ismy, zapewnia, że tło jest wewnętrznie spójne: rozwiązania dla problemów wartości początkowych istnieją, a lokalne zachowanie czteropędu jest zapewnione przez konstrukcję, a nie postulowane. Wyniki numeryczne w ekspansji $(1+1)$ -wymiarowej (bez niezmienniczości na wzrost wzdłużnej) pokazują, że nawet w tym przypadku wyniki nowego podejścia do lepkościowej hydrodynamiki są dość bliskie wynikowi aHydro, jak pokazano na Rysunkach 2 i 3. Szczególnie interesująca jest ewolucja objętościowa na Rysunku 3, dość bliska aHydro. Anizotropowość ciśnienia jest już dość bliska wcześniejszej (prostszej, ale mniej wewnętrznie spójnej wersji) lepkościowej hydrodynamiki drugiego rzędu z [11], jak pokazano na Rysunku 2, ale ta wcześniejsza wersja różni się bardziej dla objętości. Linie na obu rysunkach to odpowiednio: czerwona linia ciągła dla podejścia QaHydro z [14], niebieska linia przerywana dla wcześniejszego modelu lepkościowej hydrodynamiki z realistycznym równaniem stanu oraz fioletowa linia kropkowana dla tego przedstawionego w [H5]. Notacja $\mathcal{P}_0$ jest używana w [H5], stąd wykres na Rysunku 3, aby reprezentować ciśnienie hydrostatyczne. Postać $\mathcal{P}$ jest używana w literaturze do reprezentowania, oprócz ciśnienia hydrostatycznego, ciśnienia izotropowego (hydrostatycznego plus objętościowego), tensora ciśnienia ($\mathcal{P}^{\mu\nu}$, pisząc jawnie indeksy), i ważne jest, aby określić, która notacja jest używana.

W nowszych badaniach podkreślono, że możliwe jest uniknięcie nierównowagowego бага w przypadku tła quasi-cząstowego [16]. Celem tego jest redefinicja efektywnej temperatury, która nie jest już ustalana przez właściwą gęstość energii ani żaden inny stopień swobody hydrodynamiczny. Z drugiej strony, podejście, które opracowaliśmy, można rozszerzyć, aby uwzględnić niezerowe gęstości barionowe (równanie stanu w zespole kanonicznym), a może być ono uzyskane jako efektywne przybliżenie Kwantowej teorii Pola (QFT, Quantum Field Theory), a nie jako deformacja (klasycznej) teorii kinetycznej [P16].

Na tym etapie wydaje się dość jasne, jak systematycznie poprawić rozszerzenie hydrodynamiczne wykorzystując metodę momentów. Równanie (13) jest już zasadniczo zapisane w postaci lepkościowej hydrodynamiki drugiego rzędu. Aproksymując tensory trzeciego i czwartego rzędu $f_{-1}^{\alpha\mu\nu}$ oraz $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$ (a także składniki z jądra kolizyjnego, w ogólności), uzyskuje się wyższe rzędy aproksymacji. Następnym krokiem jest rozważenie resztkowego tensora jako zmiennych dynamicznych, stosując metodę momentów do ich dokładnej ewolucji, aproksymując nowe tensory, z którymi są sprzężone, i tak dalej dla wyższych rzędów. Rzeczywiście, zostało to ostatnio zrobione, zobacz na przykład [17, 18]. Ważne jest jednak, aby podkreślić pewne nieoczekiwane komplikacje w ramach tej koncepcji. Sytuacja jest dość gładka dla gazu klasycznego. Jeśli jednak rozważy się przypadek kwantowy lub tło kinetyczne Boltzmanna-Vlasova, ujemne potęgi $(p \cdot u)$ w $f_{-|r|}^{\mu_1 \dots \mu_2}$, które nieuchronnie się pojawiają, stają się problematyczne.

Najbardziej bezpośredni sposób, aby to zobaczyć, to spojrzenie na kwantowy prekursor funkcji rozkładu $W(x, p)$

$$W(x, p) = 2 \int \frac{d^4 v}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot v} \text{tr} \left(\hat{\rho} \hat{\phi}^\dagger(x + \frac{1}{2}v) \hat{\phi}(x - \frac{1}{2}v) \right). \quad (20)$$

W limicie kinetycznym ta transformacja Fouriera funkcji dwu-punktowej odpowiada klasycznej

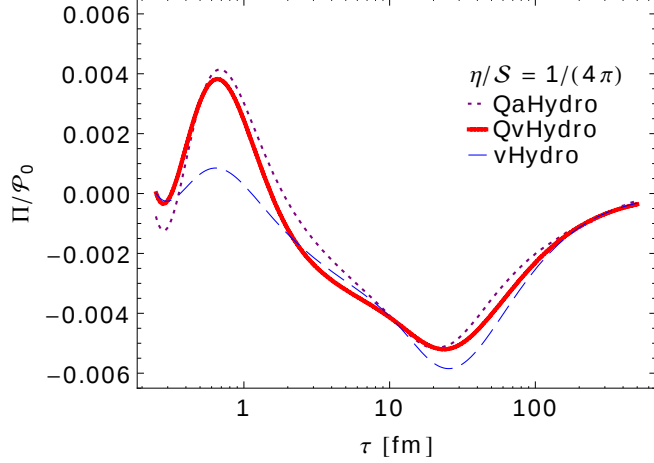


Figure 3: Ewolucja ciśnienia objętościowego z [H5].

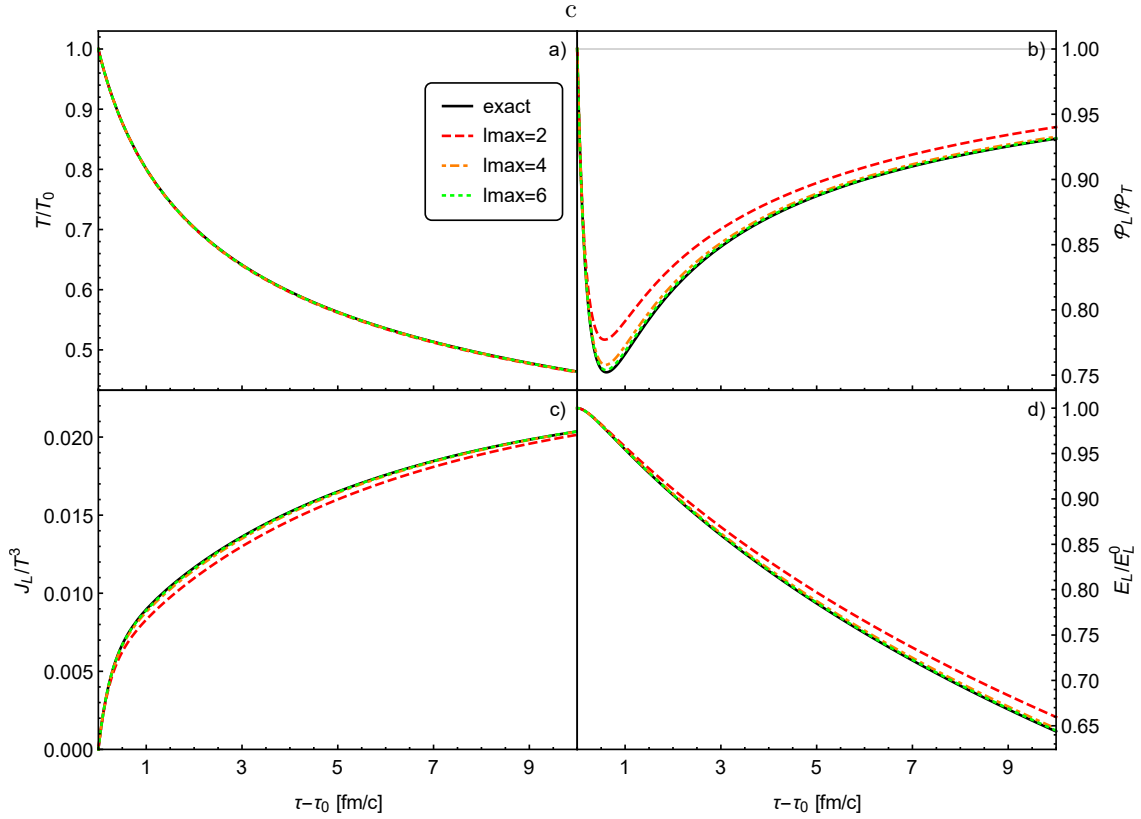


Figure 4: Zbieżność przybliżenia z [H6].

funkcji rozkładu $W \rightarrow 2\Theta(p^0)\delta^4(p^2 - m^2)f(x, \mathbf{p})$ [19]. Tensor energii i pędu wolnego pola skalarnego wygląda jak jego klasyczny odpowiednik, z tą jedyną różnicą, że całkowanie odbywa się po d^4p dla momentów off-shell, a nie po Lorentzowsko-kowariantnym (on-shell) całkowaniu momentów. Jak omówiłem w dodatku do [H8], nie jest skomplikowane znalezienie stanu kwantowego dla wolnego pola skalarnego, który ma duży wkład w ciśnienie ze strony przestrzennej części $W(x, p)$, $p^2 < 0$. W tym przypadku, zgeneralizowana wersja $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$ z $W(x, p)$ jako wagą, po prostu nie istnieje. Niezależnie od definicji u^μ (dowolny wektor czasowy się nada), $(p \cdot u)^{-2}$ daje nieskończoną osobliwość, której nie da się scałkować.

Sytuacja jest inna na powłoce many, stąd w (klasycznej) relatywistycznej teorii kinetycznej. Nawet dla cząsteczek bezmasowych $p^2 = 0$, o ile w liczniku jest wystarczająco dużo momentów, kompensują one moment w mianowniku, gdy $\mathbf{p} \rightarrow 0$. Zawsze ma to miejsce w przypadku prostego gazu, ale nie w przypadku tła Boltzmann-Vlasova, na przykład w przypadku mas zależnych od medium lub plazmy elektromagnetycznej [H6]. W odróżnieniu od pełnego przypadku kwantowego, niena hydrodynamiczne momenty tensorowe w wiodącym rzędzie są zawsze dobrze zdefiniowane dla tła Boltzmann-Vlasova. Jednym ze sposobów postępowania, którego nie można uogólnić na przypadek kwantowy, jest jednak podążanie za sugestią z [12] i przybliżenie, zasadniczo, $f_r^{\mu_1 \dots \mu_s}$ z ujemnym $r < 0$ serią momentów z dodatnim (a więc zawsze dobrze zdefiniowanym) indeksem. Jest to mniej wygodne, niż się wydaje, ponieważ konieczne jest użycie wielu takich momentów, aby uzyskać w miarę dobrą aproksymację niehydrodynamiczne stopni swobody. Jest to prawda już na początku, aby ustawić poprawne początkowe pochodne zmiennych hydrodynamicznych (zobacz dodatek D w [H6]). Rozwiązaniem, które opracowaliśmy, jest użycie zresumowanych momentów

$$\Phi_1^{\mu_1 \dots \mu_l}(\xi, x) = \int_{\mathbf{p}} (p \cdot u) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_l} e^{-\xi^2 (p \cdot u)^2} f(x, p). \quad (21)$$

Rozwijając eksponentę w całce, otrzymuje się szereg momentów funkcji rozkładu, zawierających tylko nieparzyste (i dodatnie) $(p \cdot u)$, stąd nazwa "zresumowane". Celem tej metody jest zwiększenie liczby efektywnych wymiarów, a zewnętrzny parametr ξ ma fizyczne wymiary długości.

W praktyce, biorąc pod uwagę wartości szybki spadek tych momentów dla rosnących $|\xi|$, tylko kilka dyskretnych wartości ξ może być uwzględnionych w kodach numerycznych. Zweryfikowaliśmy, że dobre dopasowanie modelu tła, już widoczne w hydrodynamice z metody momentów, jest utrzymywane w tym podejściu i że następuje szybka zbieżność do tła Boltzmanna-Vlasova. Jest to pokazane na Rysunku 4. Zgodność między przybliżoną temperaturą a anizotropowością ciśnienia z mikroskalowym tłem jest taka sama, jak już zaobserwowano w zwykłej hydrodynamice (bez pól zewnętrznych). Zgodność jest również dobra dla pola elektrycznego E_L (obliczanego tylko wzdłuż kierunku, stąd L) oraz prądu elektrycznego J_L . Linia $lmax = 2$ odpowiada hydrodynamice, w tym sensie, że całkowanie po ξ może być wykonane na poziomie równań i pozostaje się z równaniami drugiego rzędu hydrodynamiki lepkościowej (sprzężonymi z polem elektromagnetycznym w fizyce plazmy). Wszystkie składniki $T^{\mu\nu}$ i J^μ zależą tylko od wartości $\Phi_1^{\mu\nu}$ i Φ_1^μ . W rzeczywistości nie potrzebujemy momentów zależnych od ξ . Wystarczy użyć zależności między Φ_1 a momentami f , aby wszystko zapisać w kategoriach stopni swobody hydrodynamicznych. Dla $lmax = 6$, rozważając tensor szóstego rzędu $\Phi_1^{\mu_1 \dots \mu_6}$, istnieje zasadniczo pełna zgodność między przybliżeniem a wynikami Boltzmanna-Vlasova. Nawet gdybym musiał dalej modyfikować wzory i używać innych przepisów dla momentów, ta koncepcja zresumowanych momentów jest punktem wyjścia do uogólnienia metody momentów na pełny przypadek kwantowy (off-shell).

4. Kwantowy Przypadek

Większość przedstawionych dotychczas argumentów, czyli hydrodynamika, aHydro oraz Metoda Momentów, jest ściśle związana z mikroskalowym tłem kinetycznym. Relatywistyczne równanie Boltzmanna można wyprowadzić jako kowariantne rozszerzenie (klasycznego) równania Boltzmanna, uwzględniające efekty szczególnej teorii względności. Ze względu na prędkość cząstek mierzoną w eksperymentach, jest to zdecydowanie konieczne rozszerzenie. Niemniej jednak, rozmiar układu jest dość mały, dlatego warto zakwestionować przybliżenie klasyczne. Szczególnie jeśli rozważy się, jak cząstki są identyfikowane w eksperymentach. Efekty kwantowe, takie jak dyskretne stany spinowe i rozpady z teorii pól kwantowych, muszą być uwzględnione.

Zostało już zauważone [20], że nadokreślony układ równań dla uogólnionej funkcji rozkładu nakłada ograniczenia, które są sprzeczne z klasyczną funkcją rozkładu. Artykuł dotyczy fermionów, ale argumentacja jest ważna także dla skalarnych cząstek i cząstek o dowolnym spinie. Nadokreślony zbiór równań, który spełnia uogólnioną funkcję rozkładu, nie jest głównym tematem żadnej pracy, a jego wyjaśnienie w podręcznikach jest niepełne, nawet w najbardziej cytowanych opracowaniach dotyczących relatywistycznej teorii kinetycznej z pól kwantowych [19]. Na szczęście można to wykazać w kilku krokach. Zaczynając od definicji (20), która może zostać uogólniona na macierz, jeśli mamy pola wieloskładowe $\hat{\Psi}_a(x)$, na przykład fermiony Diraca

$$W_{ab}(x, p) = 2 \int \frac{d^4 v}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot v} \text{tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Psi}_a^\dagger(x + \tfrac{1}{2}v) \hat{\Psi}_b(x - \tfrac{1}{2}v) \right). \quad (22)$$

Nazywając $y = x \pm \frac{1}{2}v$, nie ma znaczenia, która z tych dwóch opcji, można użyć równań ruchu

$$\partial_{(y)} \cdot \partial_{(y)} \hat{\Psi}_c(y) + m^2 \hat{\Psi}_c(y) = \dots \quad (23)$$

aby wyprowadzić równania ewolucji dla każdej składowej $W_{ab}(x, p)$, wyrażając operator d'Alemberta $\partial_{(y)} \cdot \partial_{(y)}$ w kategoriach pochodnych względem x i v , po pewnej algebrze i wyraźnym zapisaniu stałych $\hbar$ i c

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{4} \left(\partial \cdot \partial \right) - \left(p^2 - m^2 c^2 \right) \pm i \hbar p \cdot \partial \right\} W_{ab}(x, p) = \dots, \quad (24)$$

prawa strona równości zanika dla pól swobodnych, ale w ogólności jest to wartość oczekiwana jakiejś kombinacji operatorów, zależna od oddziaływań.

Pojawienie się dwóch możliwych znaków w równaniu (24) oraz dwóch opcji dla wyrazu źródłowego po prawej stronie jest dość oczywiste. Można to natychmiast zrozumieć, jeśli przypomni się, że

zgodnie z definicją (22), macierz $W_{ab}(x, p)$ jest hermitowska, tzn. $(W_{ab}(x, p))^\dagger = W_{ba}^*(x, p) = W_{ab}(x, p)$. Obie równości są hermitowskimi sprzężeniami nawzajem.

Suma i różnica obu równań prowadzą do dwóch bardzo różnych równań dla każdej składowej macierzy wartościowej uogólnionej funkcji rozkładu $W_{ab}(x, p)$. Jest to coś na kształt ograniczenia

$$\hbar^2 \left(\partial \cdot \partial \right) W_{ab}(x, p) - 4 \left(p^2 - m^2 c^2 \right) W_{ab}(x, p) = \dots, \quad (25)$$

oraz równania kinetycznego

$$\hbar p \cdot \partial W_{ab}(x, p) = \dots. \quad (26)$$

Jeśli prawa strona równania (24) jest drugiego rzędu względem stałej Plancka $O(\hbar^2)$, pierwsze przybliżenie równania (25) to po prostu ograniczenie na masową powłokę $W_{ab} \propto \delta(p^2 - m^2)$, wtedy pierwsze przybliżenie równania (26) to niemal relatywistyczne równanie Boltzmanna dla słabych oddziaływań $p \cdot \partial W_{ab} \approx \delta(p^2 - m^2) p \cdot \partial f_{ab}(x, \mathbf{p}) = O(\hbar)$. Podobieństwo do relatywistycznej teorii kinetycznej staje się teraz wyraźne. Problem w tej ekspansji w $\hbar$ polega na tym, że sama stała $\hbar$ ma wymiary fizyczne. To, czy jest ona “mała” czy “duża”, zależy od skali akcji układu. Ponieważ $\hbar c \simeq 200$ MeV·fm, w eksperymentach z ciężkimi jonami istnieje dużo miejsca, by mieć skale akcji o porównywalnych rozmiarach lub mniejsze. Momenty rzędu kilku setek MeV (większość układów), ale medium zmieniające się znacząco na małej ułamkowej części femtometra. W [20] wskazano zasadniczo, że nawet w granicy masowej powłoki $W_{ab} \propto \delta(p^2 - m^2)$ operator d’Alemberta w równaniu ograniczenia (25) dla swobodnego pola Diraca nadal nakłada pewne istotne ograniczenia na ruch. Uwzględniając oscylacje falowe między dodatnimi i ujemnymi wartościami uogólnionej funkcji rozkładu, co z kolei jest niekompatybilne z obrazem kinetycznym związanym z klasycznymi gęstościami prawdopodobieństwa.

Użycie (22) i (20) jest bardziej ogólne, niż się wydaje, pomimo zastosowania w literaturze różnych definicji. Na przykład, w przypadku fermionów powszechnie stosuje się inną definicję, używając sprzężonego pola Diraca $\bar{\Psi}$ zamiast hermitowskiego $\psi^\dagger$, jednak różnią się one tylko przez mnożenie przez macierz gamma. W podobny sposób, fermiony podążają za równaniem Diraca (ze źródłem). Z powodu algebry Clifforda, wystarczy ponownie zastosować operator różniczkowy Diraca do obu stron równania, aby uzyskać równanie typu Klein-Gordona, jak w (23). To nie oznacza, że nie ma dalszych szczegółów do omówienia. Na przykład, w teoriach pola gauge stosuje się zazwyczaj kowariantną wersję funkcji dwóch punktów (na przykład [21]). W każdym razie, argumenty nadal obowiązują, a te same wyniki można wyprowadzić niezależnie od różnych notacji i definicji.

Aby rozwiązać problem ewolucji kwantowej w ekstremalnych warunkach zderzeń ciężkich jonów, rozważono gaz kwantowy o swobodnym strumieniu [H7]. Mówiąc inaczej, jest to pole skalarne nieoddziałujące, które w granicy kinetycznej odpowiada gazowi idealnemu o swobodnym strumieniu. Skorzystano z operatora gęstości w stanie nierównowagi (NEDO) dla macierzy gęstości układu. W szczególności, układ lokalnie zrównoważony w czasie τ_0 o stałej początkowej temperaturze T_0 . Symetria to popularna symetria Bjorkena stosowana w modelach zderzeń ciężkich jonów jako pierwsze przybliżenie. Mianowicie, niezmiennosc wzdłuż osi długości, jednorodność w płaszczyźnie poprzecznej i niezmiennosc względem odbicia osiowego. Dzięki uproszczeniom wynikającym z ograniczeń symetrii, możliwe jest dokładne rozwiązanie dla składowych $T^{\mu\nu}$, wartości oczekiwanej odpowiadającego operatora kwantowego. Rozwiązanie można zapisać za pomocą funkcji Hankela. W szczególności, początkowe wartości $T^{\mu\nu}(\tau_0)$ są dokładnie takie same, jak w granicy kinetycznej. Symetria okazuje się wystarczająca, by zachować asymptotyczne skalowanie dla dużego czasu $\tau \rightarrow \infty$. Pomimo zaniku w τ o tych samych potęgach w czasie własnym, jak w przypadkach klasycznych, wartości asymptotyczne nie są wartościami klasycznymi. Stosunek dokładny do wartości składowych do ich klasycznych odpowiedników nasycą się w granicy $\tau \rightarrow \infty$ do liczby, która nie równa się 1. W zależności od skali układu, innymi słowy, początkowej temperatury, masy pola i początkowego czasu, poprawki mogą być duże.

W pracy H8 znalazłem ogólne rozwiązania dla przestrzeni 1 + 1-wymiarowych równań dla W w przypadku swobodnego pola skalarnego. Oznacza to, że symetria obrotów i translacji w płaszczyźnie poprzecznej jest zachowana, ale nie ma wymogu niezmienności wzdłuż osi długości ani niezmienności względem odbicia osiowego. Symetria Bjorkena w wymiarze 0 + 1 jest przypadkiem szczegól-

nym. Przeanalizowałem ogólne rozwiązania, niezależnie od tego, czy układ jest w lokalnej czy globalnej równowadze. W ramach uogólnionych funkcji (dystrybucji) można to zapisać jako

$$\begin{aligned}
 W(t, z; p^0, p_T, p^z) = & \delta(p^0) \delta(p^z) \int d\xi \left[e^{-i(t\sqrt{4m_T^2 + \xi^2} - z\xi)} \mathcal{A}(\xi; p_T) + e^{i(t\sqrt{4m_T^2 + \xi^2} - z\xi)} \mathcal{A}^*(\xi; p_T) \right] \\
 & + \cos \left(2w \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{(p^0)^2 - (p^z)^2}} \right) \mathcal{F}_{\text{even}}(p_0, p_T, p^z) \\
 & + \sqrt{\frac{(p^0)^2 - (p^z)^2}{p^2 - m^2}} \sin \left(2w \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{(p^0)^2 - (p^z)^2}} \right) \mathcal{F}_{\text{odd}}(p_0, p_T, p^z).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Notacja $p_T = \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2}$, $m_T^2 = m^2 + p^2$, $w = z, p^0 - t, p^z$ jest dość standardowa. Parametr ξ jest parametrem całkowym. Funkcje $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_{\text{even}}$, $\mathcal{F}_{\text{odd}}$ są dotychczas nieograniczone. W sensie, że każda funkcja spełnia wersję 1 + 1 wymiarową równania (24). Ważne jest, aby zauważyć, że p^μ w (27) nie jest na powłoce masy (nie jest "on-shell"). W rzeczywistości, jak wyjaśniono w pracy [H8], tylko trywialne rozwiązanie (bez zależności od czasoprzestrzeni) może być na powłoce masy $p^2 = m^2$. Pierwszy człon jest osobliwy $\propto \delta(p^0)\delta(p^z)$ i, jeśli w ogóle występuje, nie może mieć granicy kinetycznej. Pozostałe dwa człony mogą mieć odpowiednią granicę kinetyczną. Po uwypukleniu skali działania stanu układu A i oznaczeniu $\varepsilon = \hbar/A$, możliwe jest sklasyfikowanie rozwiązań mających granicę kinetyczną. Mianowicie, w granicy $\varepsilon \rightarrow 0$, $(2\pi\hbar)^3 W \rightarrow \delta(p^2 - m^2)f$ z dodatnią funkcją $f \geq 0$. Szczegóły znajdują się w publikacji [H8], a wyniki są takie, że $\mathcal{F}_{\text{even}}$ i $\mathcal{F}_{\text{odd}}$ są odpowiednio proporcjonalne do parzystej (a więc rzeczywistej) części transformaty Fouriera odpowiadającej funkcji rozkładu kinetycznego f oraz nieparzystej (urojonej) części.

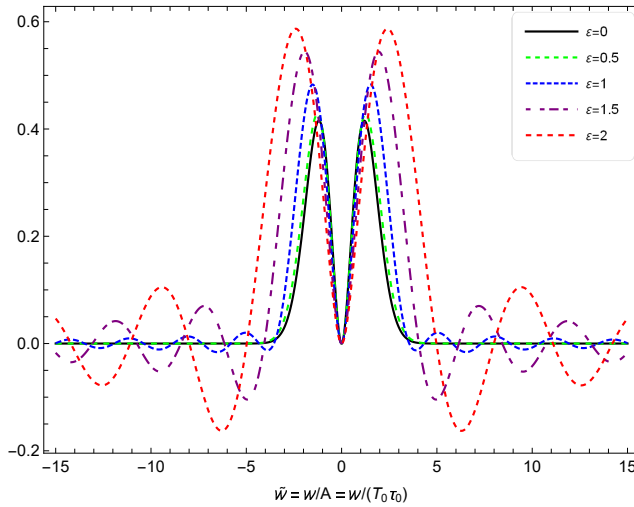


Figure 5: Skalowana funkcja całkowana z $\mathcal{P}_L$ z [H8]

cznym (klasycznym) limitem przy różnych wartościach ε . Ograniczająca funkcja rozkładu kinetycznego ma kształt Gaussa (a nie wykładniczy, jak w przypadku lokalnej równowagi w limicie Boltzmann), izotropowa w chwili τ_0 z efektywną temperaturą T_0 . Skala działania to $T_0\tau_0$. Wybierając różne wartości tych parametrów, można sprawić, by skala układu była dowolnie duża lub mała w jednostkach $\hbar$. Na rysunku 5 wykreślono skalowaną funkcję całkowaną z ciśnienie wzdłużnego $\mathcal{P}_L$ względem przeskalowanego w . To znaczy, funkcja całkowana z $\mathcal{P}_L$, po całkowaniu względem wszystkich zmiennych oprócz w , podzielony przez nieistotny stały prefaktor (który nie zależy od w), względem $\tilde{w} = w/A$.

Czarna linia ciągła, limit $\varepsilon \rightarrow 0$ to zarówno małe $\varepsilon \ll 1$, które jest nieodróżnialne od klasycznego rozkładu. Linia dla $\varepsilon = 0.5$ znajduje się prawie na samej górze wyników klasycznych. Jednakże, w

Dokładne rozwiązanie (27) zachowuje swoje oscylacje dla wszystkich wartości ε , i nigdy nie przyjmuje postaci odpowiadającej klasycznemu rozwiązaniu. Jednak mając ogólną postać dokładnych rozwiązań, możliwe jest zweryfikowanie intuicyjnego założenia, że po całkowaniu względem pewnego parametru szybkie oscylacje wokół średniej mogą się zrównoważyć i dać coś, co będzie bliskie klasycznemu oczekiwaniu kinetycznemu.

W szczególności, w [H8], porównałem dokładne (kwantowe) wyniki z ich kinety-

długim ogonie występują fluktuacje powyżej i poniżej zera. Mimo że są to niewielkie odchylenia od zera, dodatnia część znacząco przewyższa część ujemną. Jak pokazano na rysunku 6, wciąż daje to względną korektę rzędu $\approx 10\%$ do ciśnienia wzdłużnego. Nic dziwnego, że inne przypadki, które już pokazują znaczące odchylenia w obrębie całownika, dają znacznie większe korekty, przekraczające 100%. Oznacza to, że układ jest dominowany przez korekty kwantowe, przynajmniej jeśli chodzi o $\mathcal{P}_L$. Podobne wyniki, choć nieco mniejsze pod względem wielkości, mają miejsce także dla ciśnienia poprzecznego oraz odpowiedniej gęstości energii, które otrzymują korekty rzędu kilkudziesięciu procent.

Podsumowując wyniki, z [H7] i z [H8], poprawki kwantowe zależą od efektywnego działania układu, a wolne pole kwantowe ma tę samą ewolucję stopni swobody hydrodynamicznych, co wolny gaz idealny w limitach dużych skal działania (w porównaniu do $\hbar$). Symetria Bjorkena może być wystarczająca do zapewnienia długozasiegowych skal czasowych w odniesieniu do odwrotnych potęg τ , ale nie ich stosunków. Istnieje wyraźna różnica ilościowa, jeśli nie jakościowa, w długim czasie, która jest nadal widoczna dla małych skal działania, w standardowych jednostkach i przy użyciu stałej Boltzmanna k_B , gdzie $k_B T_0 \tau_0 < \hbar c$.

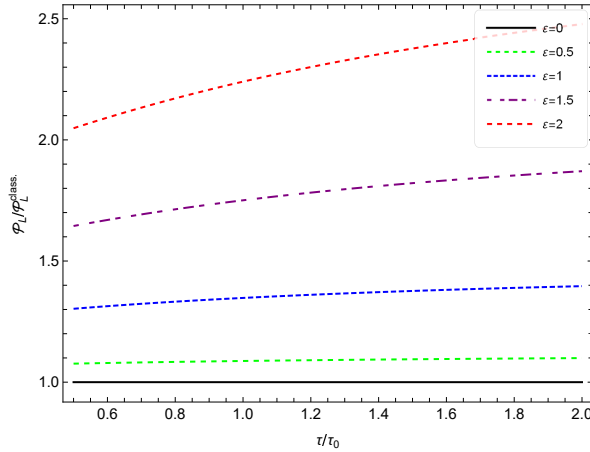


Figure 6: Stosunek $\mathcal{P}_L / \mathcal{P}_L^{\text{class.}}$ z [H8].

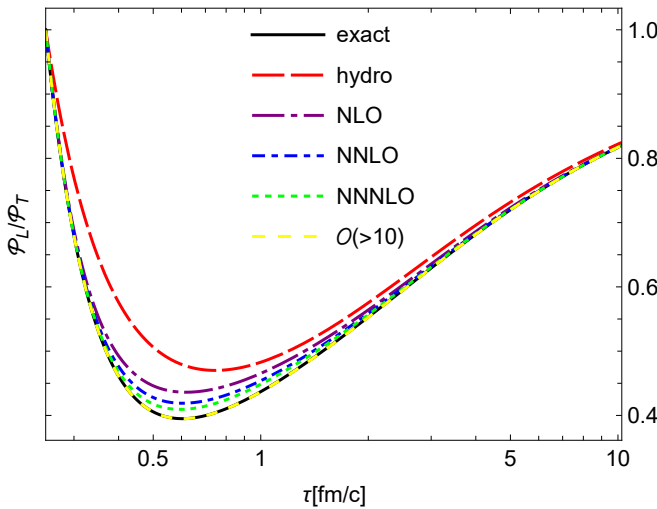


Figure 7: Anizotropia Ciśnienia, z [H9].

w przypadku Boltzmanna-Vlasova opracowanego w [H6]. Zostało to rozwiązane za pomocą zsumowanych momentów (21). Dodatkową komplikacją jest to, że ta generacja momentów jest niewłaściwa poza powłoką. Najbardziej bezpośredni sposób, by to zauważyć, to spostrzeżenie, że $(p \cdot u) \neq \sqrt{(p \cdot u)^2} = |p \cdot u|$, ponieważ prawa strona nigdy nie jest ujemna, podczas gdy lewa strona może być dla czasoprzestrzennych $p^2 < 0$. Zastąpienie $(p \cdot u)$ jego wartością bezwzględną $|p \cdot u|$ w definicji (21) nie jest zbyt pomocne. Równanie dynamiczne wówczas wygeneruje sprzężenie z nową generacją momentów, mającą deltę Diraca $\delta(p \cdot u)$ w całkowaniu, wynikającą z wyprowadzenia

Ważną rzeczą, którą należy zauważyć w tym momencie, jest to, że duża liczba samoodziaływań w ewolucji stopni swobody hydrodynamicznych w (13), wynika ze struktury samego równania Boltzmanna w wersji relatywistycznej. Bardzo podobna struktura, przed jakąkolwiek aproksymacją, występuje w kwantowym prekursorze funkcji rozkładu (26). Nie jest możliwe bezpośrednie użycie (8) lub, bardziej precyzyjnie, jego wersji poza powłoką. Czynniki $(p \cdot u)$ w mianowniku powodują niecałkowalne bieguny. Jednakże, łagodniejsza wersja tego problemu pojawia się

wartości bezwzględnej, w sensie dystrybucji temperowanych. Ich dokładna ewolucja, z kolei, będzie sprzężona z nowymi momentami z δ' , i tak dalej. Można uniknąć tego wszystkiego dzięki rozważnej redefinicji zsumowanych momentów. W pracy [H9] użyłem zestawów momentów

$$\phi_n^{\mu_1 \dots \mu_s}(\zeta, x) = \Delta_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Delta_{\nu_s}^{\mu_s} \int d^4 p (p \cdot u)^n e^{-\zeta(p \cdot u)^2} p^{\nu_1} \dots p^{\nu_s} W(x, p), \quad (28)$$

korzystając z całek i pochodnych względem zewnętrznego parametru ζ , można użyć tylko dwóch generacji, powiedzmy $n = 1$ i $n = 2$, aby zapisać stopnie swobody hydrodynamiczne oraz momenty, z którymi są one sprzężone. W szczególności, możliwe jest zapisanie uogólnienia (13)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}^{\langle \mu \rangle \langle \nu \rangle} = & 2 \left(\mathcal{P} + \Pi \right) \sigma^{\mu\nu} + \frac{5}{3} \theta \left(\mathcal{P} + \Pi \right) \Delta^{\mu\nu} - \frac{5}{3} \theta \pi^{\mu\nu} + 2 \pi_\alpha^{(\mu} \sigma^{\nu)\alpha} - 2 \pi_\alpha^{(\mu} \omega^{\nu)\alpha} \\ & - \int_0^\infty d\zeta \left[\mathcal{C}_1^{\langle \mu \rangle \langle \nu \rangle} + \nabla_\alpha \phi_1^{\alpha \langle \mu \rangle \langle \nu \rangle} - \dot{u}_\alpha (2\phi_1^{\alpha\mu\nu} - 2\zeta \phi_3^{\alpha\mu\nu}) - \nabla_\alpha u_\beta \left(\phi_0^{\alpha\beta\mu\nu} - 2\zeta \phi_2^{\alpha\beta\mu\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Oprócz dodatkowej komplikacji związanej z całką względem ζ oraz momentami zależnymi od ζ po prawej stronie, jest to bardzo podobne do (13). Argumenty użyte w przypadku klasycznym dla metody momentów mogą zostać uogólnione na przypadek kwantowy. Momenty $\mathcal{C}$ postępują zgodnie z przepisem dla momentów ϕ , stąd zależność od ζ . Najważniejsza różnica między “naive” uogólnioną wersją (13) a jej uogólnioną wersją (29), polega na tym, że jest ona dobrze określona, niezależnie od szczegółów off-shell $W(x, p)$.

W [H9] przedstawiono prosty przykład stanu dla wolnego pola skalarnego, w którym kwantowa wersja momentu $f_{-2}^{\alpha\beta\mu\nu}$ (z klasyczną definicją, ale z off-shell W zamiast funkcji rozkładu f) nie istnieje. Należy dodać, że w limicie kinetycznym (on-shell pozytywne W) całka względem parametru ζ może zostać wykonana dokładnie i ponownie uzyskujemy (13).

Jeśli uogólniony kernel kolizyjny jest traktowany w Przybliżeniu Czasu Relaksacji (RTA), składnik $\mathcal{C}_1^{\mu\nu}$ może być dokładnie scałkowany względem ζ . Co ciekawe, jeśli sytuacja jest wystarczająco łagodna, jak w przypadku rozszerzenia Bjorkena z RTA, możliwe jest zgrupowanie momentów nie-hydrodynamicznych i wykonanie całkowania względem ζ . Korzystając z liniowego operatora $\hat{L}$

$$\hat{L}[\varphi(\zeta)] = 2\zeta \varphi(\zeta) - \int_\zeta^\infty d\zeta' \varphi(\zeta'), \quad (30)$$

Możliwe jest skupienie niezerowych składników momentów nie-hydrodynamicznych po prawej stronie równania (29) i bezpośrednie wykonanie całki względem parametru ζ .

Zastosowanie operatora wielokrotnie do dokładnych równań ewolucji momentów nie-hydrodynamicznych oraz dodatkowych momentów, do których się one sprzęgają, pozwala wykonać dokładnie całkowanie po ζ także w wyższych rzędach. Usunięcie dodatkowego parametru ζ z ogólnej ekspansji hydrodynamicznej umożliwia sprawdzenie, czy argumenty użyte w limicie kinetycznym nadal obowiązują poza powłocę masa. W [H9], rzeczywiście, uogólniłem metodę numeryczną, która jest powszechnie stosowana do uzyskiwania dokładnych rozwiązań równania Boltzmanna w kontekście W off-shell i przeprowadziłem takie testy. Dla dwóch

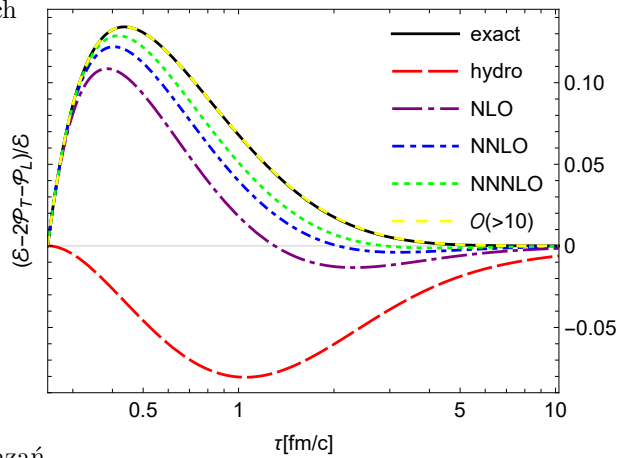


Figure 8: Anomalia Śladu, z [H9].

rozważanych warunków początkowych, mimo dużego względnego przybliżenia momentów niehydrodynamicznych, składnik sprzężenia własnego dominuje w przypadku $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}_T$ i $\mathcal{P}_L$. Hydrodynamika, jak się spodziewano, jest stosunkowo dobrym przybliżeniem dla tych wielkości. Z drugiej strony, w kombinacji $\mathcal{E} - 2\mathcal{P}_T - \mathcal{P}_L$, bezpośredni wkład stopni swobody hydrodynamicznych upraszcza się, co sprawia, że hydrodynamika jest złym przybliżeniem i wymaga znacznie wyższego rzędu w uogólnionej ekspansji, aby zbiec do wyników modelu mikroskalowego. Oba warunki początkowe są bardzo odległe od limitu kinetycznego i w rzeczywistości momenty niehydrodynamiczne w (29) są po prostu niemożliwe na brzegu. Aby to zobrazować, na rysunkach 7 i 8 znajdują się wykresy z [H9], odpowiednio dla stosunku ciśnienia podłużnego do poprzecznego oraz anomalii śladu skalowanej do gęstości energii, dla izotropowych warunków początkowych.

2.4 Podsumowanie

Podsumowując, artykuły zawarte w osiągnięciu naukowym poświęcone są hydrodynamice w kontekście zderzeń jonów ciężkich. Celem jest zrozumienie, czy i dlaczego hydrodynamika może być stosowana, pomimo dużych gradientów i nieidealnych składników.

W publikacjach [H1-H4] głównym tematem jest hydrodynamika anizotropowa. Początkowa idea polegała na zastosowaniu uogólnionej wersji równowagi lokalnej. W ten sposób zachowuje się limit swobodnego rozpraszania (zanikające oddziaływania), odzyskuje się hydrodynamikę lepką drugiego rzędu, liniaryzując odchylenia od równowagi (w pobliżu równowagi), a także traktuje się składniki nienaidealne w sposób nieliniowy dla dużych odchylenia od równowagi. Anizotropowy ansatz dostarcza dodatkowych stopni swobody, dlatego w ogólności potrzebne są dodatkowe równania dynamiczne. W [H1] zaproponowaliśmy ich wyprowadzenie z drugiego momentu równania Boltzmanna. Oprócz poprawy zgodności z wynikami kinetycznymi, wprowadzona metoda geometryczna może zostać łatwiej rozszerzona. To, co zrobiłem w [H2], to uogólnienie równań uwzględniających wszystkie składniki nieidealne, niezależnie od symetrii rozwoju. Z porównań numerycznych [H3] wynika, że ciśnienie objętościowe jest dość trudne do dokładnego odwzorowania w hydrodynamice anizotropowej. Z drugiej strony, nowsze podejście do hydrodynamiki lepkiej drugiego rzędu jest zadziwiająco dobre. Założenie dotyczące formy funkcji rozkładu wydaje się mniej istotne niż metoda wyboru równań ruchu. W rzeczywistości, w [H4] uogólniłem metodę momentów do anizotropowego tła. To zachowuje samoodziaływania stopni swobody hydrodynamicznych w ich ewolucji, w tym te nienaidealne. Pozostawiając wszystkie przybliżenia w traktowaniu pozostałych stopni swobody nienaidealnych, które pojawiają się w dokładnej ewolucji składników nienaidealnych. Otrzymana receptura jest znacznie dokładniejsza niż wcześniejsze wersje i lepsza niż hydrodynamika lepka drugiego rzędu. Publikacja [H5] dotyczy hydrodynamiki z realistycznym równaniem stanu. Kwazicząstki sprzężone z terminem “bag” mogą dopasować każde równanie stanu w równowadze. Uogólniliśmy metodę momentów do wyciągania współczynników transportu w hydrodynamice lepkiej drugiego rzędu. Jako że brakowało dokładnego rozwiązania, porównaliśmy z hydrodynamiką anizotropową z realistycznym równaniem stanu, potwierdzając tendencję obserwowaną w [H3]: wyniki hydrodynamiki anizotropowej są zbliżone do hydrodynamiki lepkiej, o ile ta ostatnia jest uzyskiwana za pomocą metody momentów.

Wymóg asymptotycznie słabych oddziaływań w kinetycznej teorii względnościowej stoi w sprzeczności z silnym oddziaływaniem, które jest potrzebne, aby uzyskać mały stosunek lepkości ścinającej do entropii, co z kolei jest niezbędne do dopasowania danych eksperymentalnych. Publikacja [H6] stanowi pierwszy krok do uogólnienia metody momentów do tła, które nie jest czysto kinetyczną teorią względnościową. Rozważaliśmy przypadek równania Boltzmanna-Vlasova, w szczególności porównaliśmy wyniki uzyskane za pomocą uogólnionej metody momentów z dokładnym rozwiązaniem $(0 + 1)$ -wymiarowego rozwoju plazmy, która oddziałuje z polem elektrycznym. Stwierdziliśmy, że praktyczne jest użycie zbioru zresumowanych momentów zamiast regularnych, aby uniknąć źle określonych wyrażeń przy wyższych rzędach oraz móc ustalić początkową pochodną, oprócz warunków początkowych, dla każdej zmiennej dynamicznej w miarę jak rozwój idzie w wyższe rzędy. Ta modyfikacja rozwoju okazała się bardzo użyteczna do dalszego uogólnienia metody momentów. Relatywistyczne równanie Boltzmanna można traktować jako rozwinięcie w małym $\hbar$ równań, które spełnia jego kwantowy odpowiednik w teorii pól kwantowych. Ponieważ $\hbar \approx 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}/c$, nie ma szczególnego powodu, aby uznać korekty kwantowe za małe w

zderzeniach ciężkich jonów, szczególnie w początkowych etapach: setki MeV/c dla typowego pędu, ale gęstości, które muszą się znacząco zmieniać na odległościach mniejszych niż fm z powodu ograniczonego rozmiaru.

Publikacje [H7-H8] są poświęcone dokładnym rozwiązaniom, poza równowagą, dla wolnego pola skalarnego. Zastosowane metody są różne, ale oba badania pokazują, że korekty kwantowe są duże.

Publikacja [H9] jest sformalizowaniem intuicyjnego stwierdzenia. Metoda momentów opiera się na strukturze relatywistycznego równania Boltzmanna, ta struktura jest obecna w kwantowym prekursorze funkcji rozkładu przed jakąkolwiek aproksymacją, która prowadzi do relatywistycznej teorii kinetycznej: powinno być więc możliwe rozszerzenie tej metody na pełny przypadek kwantowy, poza równowagą. I właśnie to zrobiłem w [H9]. Konieczne jest użycie innego zestawu momentów, a nie naiwnych rozszerzeń tych stosowanych w teorii kinetycznej. Jest to podobne do podejścia zastosowanego w [H6], ale przypadek poza równowagą jest na tyle różny, że wymaga innego zestawu zsumowanych momentów. Wynikające z tego rozszerzenie jest dobrze zdefiniowane na wszystkich rzędach, a rząd wiodący to druga-rzędowa hydrodynamika lepkości.

3. Inne Osiągnięcia Naukowe

3.1 Lista Pozostałych Publikacji (Niezawartych w Osiągnięciu Naukowym)

P1. F.Becattini, L. Tinti, *The Ideal relativistic rotating gas as a perfect fluid with spin*, Annals Phys. 325 (2010) 1566-1594

P2. F.Becattini, L. Tinti, *Thermodynamical inequivalence of quantum stress-energy and spin tensors*, Phys.Rev.D 84 (2011) 025013

P3. F.Becattini, L. Tinti, *Nonequilibrium Thermodynamical Inequivalence of Quantum Stress-energy and Spin Tensors*, Phys.Rev.D 87 (2013) 2, 025029

P4. W. Florkowski, R. Ryblewski, M. Strickland, L. Tinti, *Leading-order anisotropic hydrodynamics for systems with massive particles*, Phys.Rev.C 89 (2014) 5, 054909

P5. F. Becattini, L. Bucciattini, E. Grossi, L. Tinti, *Local thermodynamical equilibrium and the beta frame for a quantum relativistic fluid*, Eur.Phys.J.C 75 (2015) 5, 191

P6. W. Florkowski, E. Maksymiuk, R. Ryblewski, L. Tinti, *Anisotropic hydrodynamics for a mixture of quark and gluon fluids*, Phys.Rev.C 92 (2015) 5, 054912

P7. W. Florkowski, R. Ryblewski, M. Strickland, L. Tinti, *Non-boost-invariant dissipative hydrodynamics*, Phys.Rev.C 94 (2016) 6, 064903

P8. D. Montenegro, L. Tinti, G. Torrieri, *Ideal relativistic fluid limit for a medium with polarization*, Phys.Rev.D 96 (2017) 5, 056012, Phys.Rev.D 96 (2017) 7, 079901 (addendum)

P9. D. Montenegro, L. Tinti, G. Torrieri, *Sound waves and vortices in a polarized relativistic fluid*, Phys.Rev.D 96 (2017) 7, 076016

P10. L. Tinti, W. Florkowski, *Particle Polarization, Spin Tensor, and the Wigner Distribution in Relativistic Systems*, Monograph in the Book *Strongly Interacting Matter under Rotation*, DOI:10.1007/978-3-030-71427-7_5

P11. M. Gazdzicki, M.I. Gorenstein, O. Savchuk, L. Tinti, *Notes on statistical ensembles in the Cell Model*, Int.J.Mod.Phys.E 29 (2020) 08, 2050060

P12. M. Gazdzicki, M. Gorenstein, I. Pidhurskyi, O. Savchuk, L. Tinti, *Equilibration and Locality*, Acta Phys.Polon.B 53 (2022) 8, 8-A2

P13. M. Gazdzicki, D. Kikola, I. Pidhurskyi, L. Tinti, *Spatial correlations of charm and anticharm quarks at hadronisation*, preprint (2023), arXiv:2305.00212

P14. L. Tinti, A. Vereijken, S. Jafarzade, F. Giacosa, *Scalar field with a time-independent classical source is not trivial after all: From vacuum decay to scattering*, Phys.Rev.D 110 (2024) 11, 116004

P15. A. Daher, L. Tinti, A. Jaiswal, R. Ryblewski, *Quasiparticle second-order dissipative hydrodynamics at finite chemical potential*, Phys.Rev.D 111 (2025) 7, 074011

P16. M. Gazdzicki, D. Kikola, I. Pidhurskyi, L. Tinti, *Apparent teleportation of indistinguishable particles*, preprint (2023), arXiv:2503.10565

3.2 Wnioski Końcowe

Moja praca magisterska dotyczyła badania cieczy wirujących w ramach skutecznych Lagrangianów. Podczas moich studiów doktoranckich we Florencji, badałem ciecze wirujące w teoriach pola kwantowego, a w szczególności rolę tensora spinowego i wybór “pseudogauge”. Moja rozprawa doktorska opierała się głównie na publikacjach [P1-P3]. Publikacja [P5] jest związana z pracą, którą wykonywałem podczas studiów doktoranckich, mianowicie rozszerzeniem termodynamiki i lokalnej równowagi na systemy kwantowe, przy użyciu podejścia Zubareva. Po uzyskaniu doktoratu w 2013 roku rozpocząłem pierwszą pracę na stanowisku doktora-stażysty na Uniwersytecie Jana Kochanowskiego w Kielcach. Moja główna dziedzina badań przesunęła się w kierunku hydrodynamiki anizotropowej [H1, P4, H2, H3, H4, P6, P7, H5]. Między końcem pierwszego post-doktora a drugim na Uniwersytecie Stanowym Ohio, badałem oczekiwane właściwości cieczy wirujących z ich asymptotycznymi symetriami w skutecznych działaniach [P8, P9]. Kontynuowałem pracę nad generalizacją rozszerzenia hydrodynamicznego [H6]. W 2017 roku przenieśliem się na Uniwersytet Goethego w Niemczech. Stworzyłem monografię z profesorem Florkowskim na temat polaryzacji cząstek w wolnych polach w formalizmie Wignera [P10], oraz jego związku z makroskalowymi tensorami energii-pędu i spinowymi.

W ramach współpracy z moim byłym promotorem i jego doktorantem, obliczyliśmy dokładne wartości tensora energii-pędu poza równowagą [H7], poddając go ekspansji w wymiarze $0 + 1$ (symetria Bjorkena).

W międzyczasie dołączyłem do współpracy z eksperymentalistami i teoretykami, aby badać fundamentalne aspekty materii tworzonej w zderzeniach jonów ciężkich oraz jej możliwe konsekwencje w obserwacjach. Ten długoterminowy projekt trwa nadal. Głównym celem była termalizacja, struktura przyczynowa oraz możliwe łamanie klasycznych oczekiwań z powodu efektów kwantowych [P11, P12, P13, P16].

Pracuję nad tymi tematami podczas mojego obecnego zatrudnienia na Uniwersytecie Jana Kochanowskiego. Kontynuuję badania nad fundamentalnymi aspektami hydrodynamiki oraz jej zastosowaniami fenomenologicznymi [H8, H9, P15]. Jako współopiekun pracy doktorskiej Arthura Vereijkena rozpocząłem współpracę z grupą profesora Giacosa, publikując pracę na temat dokładnych rozwiązań dla kwantowego pola skalarnego wchodzącego w interakcję z klasycznym źródłem [P14].

4. Bibliografia

- [1] W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*, ISBN: 978-981-4280-66-2 (World Scientific, Mar. 2010).
- [2] U. Heinz and R. Snellings, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **63**, 123 (2013).
- [3] P. Romatschke, Int. J. Mod. Phys. E **19**, 1 (2010).
- [4] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets, and M. A. Stephanov, Journal of High Energy Physics **2008**, 100 (2008).
- [5] G. S. Denicol, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **41**, 124004 (2014).
- [6] A. Muronga, Phys. Rev. C **69**, 034903 (2004).
- [7] J. E. Bernhard, J. S. Moreland, S. A. Bass, J. Liu, and U. Heinz, Phys. Rev. C **94**, 024907 (2016).

- [8] W. Florkowski and R. Ryblewski, Phys. Rev. C **83**, 034907 (2011).
- [9] M. Martinez and M. Strickland, Nucl. Phys. A **848**, 183 (2010).
- [10] W. Florkowski, R. Ryblewski, and M. Strickland, Phys. Rev. C **88**, 024903 (2013).
- [11] A. Jaiswal, R. Ryblewski, and M. Strickland, Phys. Rev. C **90**, 044908 (2014).
- [12] G. S. Denicol, H. Niemi, E. Molnar, and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **85**, [Erratum: Phys.Rev.D 91, 039902 (2015)], 114047 (2012).
- [13] U. Heinz, D. Bazow, and M. Strickland, Nuclear Physics A **931**, 920 (2014).
- [14] M. Alqahtani, M. Nopoush, and M. Strickland, Phys. Rev. C **92**, 054910 (2015).
- [15] M. Alqahtani, M. Nopoush, and M. Strickland, Phys. Rev. C **95**, 034906 (2017).
- [16] G. S. Rocha and G. S. Denicol, Phys. Rev. D **109**, 096011 (2024).
- [17] C. V. P. de Brito and G. S. Denicol, Phys. Rev. D **108**, 096020 (2023).
- [18] D. Ye, S. Jeon, and C. Gale, Phys. Rev. C **110**, 024907 (2024).
- [19] S. R. De Groot, *Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications*, edited by W. A. Van Leeuwen and C. G. Van Weert, ISBN: 978-044854537 (North-Holland Publishing Company, 1980).
- [20] H.-T. Elze, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **28**, 2235 (2002).
- [21] P. Zhuang and U. W. Heinz, Annals Phys. **245**, 311 (1996).