Trambak Bhattacharyya

Autoreferat

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

2026

Spis treści

1 Dane osobowe **2**

2 Stopnie naukowe i dyplomy **2**

3 Informacje o zatrudnieniu **2**

4 Opis osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy **2**
4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego . . . 2
4.2 Publikacje związane z osiągnięciem naukowym . . . 2
4.3 Opis celów naukowych oraz najważniejszych wyników . . . 5
4.3.1 Wprowadzenie . . . 5
4.3.2 O zbiorze prac . . . 6
4.3.3 Nieaddytywna mechanika statystyczna i zderzenia wysokoenergetyczne . . . 7
4.3.4 Odpowiedź ośrodka: liniowa i nieliniowa ewolucja . . . 15
4.3.5 Odpowiedź ośrodka: z perspektywy teorii kinetycznej . . . 19
4.3.6 Podsumowanie i najważniejsze wnioski . . . 26
4.3.7 Plany na przyszłość . . . 27
Bibliografia . . . 27

5 Prezentacja istotnej działalności naukowej **29**

6 Prezentacja osiągnięć dydaktycznych i organizacyjnych oraz osiągnięć w zakresie popularyzacji nauki **30**
6.1 Dydaktyka/nadzór . . . 30
6.2 Osiągnięcia organizacyjne . . . 30
6.3 Popularyzacja nauki . . . 30

7 Inne informacje **30**

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Trambak Bhattacharyya

2 Stopnie naukowe i dyplomy

Doktor filozofii w dziedzinie fizyki: Variable Energy Cyclotron Centre (Homi Bhabha National Institute), Kalkuta, Indie, 2015
Tytuł rozprawy doktorskiej: Energy Loss of High Energy Partons in Quark-Gluon Plasma
Promotor: Prof. Jan-e Alam

Magister fizyki: University of Calcutta, Kalkuta, Indie, 2009
Specjalizacja: Kwantowa teoria pola i fizyka cząstek

Licencjat z fizyki: St. Xavier's College, afiliowany przy University of Calcutta, 2006

3 Informacje o zatrudnieniu

- 2024–obecnie: Adiunkt, Instytut Fizyki, Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach, ul. Uniwersytecka 7, 25-406 Kielce, Polska
- 2018–2024: Starszy pracownik naukowy, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 141980, Obwód Moskiewski, Rosja
- 2016–2018: Staż podoktorski, University of Cape Town, Rondebosch 7701, Republika Południowej Afryki
- 2015–2016: Staż podoktorski, Indian Institute of Technology Indore, Khandwa Road, Simrol, MP 453552, Indie
- 2014–2015: Wizytujący naukowiec, Indian Institute of Technology Indore, Khandwa Road, Simrol, MP 453552, Indie
- 2011–2014: Starszy stypendysta badawczy, Variable Energy Cyclotron Centre, 1/AF Bidhan Nagar, Kalkuta 700064, Indie
- 2009–2011: Młodszy stypendysta badawczy, Variable Energy Cyclotron Centre, 1/AF Bidhan Nagar, Kalkuta 700064, Indie

4 Opis osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

"Poza statystyką Boltzmanna-Gibbsa: charakterystyka plazmy kwarkowo-gluonowej z wykorzystaniem statystyki nieaddytywnej"

4.2 Publikacje związane z osiągnięciem naukowym

P1 A harmonic oscillator in nonadditive statistics and a novel transverse momentum spectrum in high-energy collisions
Trambak Bhattacharyya, Maciej Rybczyński, Grzegorz Wilk, and Zbigniew Włodarczyk
Phys. Lett. B **867**, 139588 (2025)
e-print: arXiv:2412.09234 [hep-ph]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2024)[1]: 4.5

[1] aktualny na dzień 14 maja 2026

Mój wkład: (autor korespondujący) konceptualizacja problemu; wyprowadzenie modelu teoretycznego; generowanie wykresów; analiza numeryczna i porównanie teorii z danymi eksperymentalnymi; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

P2 Radial Flow in Non-Extensive Thermodynamics and Study of Particle Spectra at LHC in the Limit of Small $(q-1)$
Trambak Bhattacharyya, Jean Cleymans, Arvind Khuntia, Pooja Pareek and Raghunath Sahoo
Eur. Phys. Jour. A **52**, 30 (2016)
e-print: arXiv:1507.08434

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2016): 2.833

Mój wkład: Przeprowadzenie analizy teoretycznej oraz wyprowadzenie wszystkich wyników; weryfikacja wyników uzyskanych z analiz numerycznych; generowanie wykresówzwiązanych z wynikami analitycznymi; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

P3 Analytic results for the Tsallis thermodynamic variables
Trambak Bhattacharyya, Jean Cleymans and Sylvain Mogliacci
Phys. Rev. D **94**, 094026 (2016)
e-print: arXiv:1608.08965 [hep-th]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2016): 4.557

Mój wkład: Weryfikacja zamkniętych wzorów analitycznych zawartych w manuskrypcie oraz porównanie wyników z estymacjami numerycznymi; wyprowadzenie bezmasowych rozwiązań analitycznych; przygotowanie części oryginalnej wersji manuskryptu

P4 Analytical calculations of the Quantum Tsallis thermodynamic variables
Ayman Hussein and *Trambak Bhattacharyya*
Physics **4** no. 3, 800 (2022)
Zaproszony wkład do wydania specjalnego "Jean Cleymans: A Life for Physics"
e-print: arXiv:2206.09145 [cond-mat.stat-mech]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2022): 1.6

Mój wkład: (autor korespondujący) konceptualizacja problemu; zaproponowanie rozszerzenia metodologii z P3 do domeny kwantowej; wyprowadzenie modelu oraz wyników analitycznych; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu; nadzór naukowy

P5 Time Evolution of Temperature Fluctuation in a Non-Equilibrated System
Trambak Bhattacharyya, Prakhar Garg, Raghunath Sahoo and Prasant Samantray
Eur. Phys. Jour. A (Letter) **52**, 283 (2016)
e-print: arXiv:1510.03154

Impact factor (Journal Citation Reports 2016): 2.833

Mój wkład: (autor wiodący) konceptualizacja problemu; wyprowadzenie modelu matematycznego i wyników; przeprowadzenie analizy numerycznej; generowanie wykresów; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

P6 Propagation of non-linear waves in hot, ideal, and non-extensive quark-gluon plasma
Trambak Bhattacharyya and Abhik Mukherjee
Eur. Phys. Jour. C **80**, 656 (2020)
e-print: arXiv:2003.10692 [nucl-th]

Impact factor (Journal Citation Reports 2020): 4.590

Mój wkład: (autor korespondujący) konceptualizacja problemu; wyprowadzenie modelu oraz wyników analitycznych; przeprowadzenie analizy numerycznej; generowanie wykresów; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

P7 Nonlinear Pulse Dynamics in a Magnetized and Nonextensive Quark-Gluon Plasma
Trambak Bhattacharyya and Md Hasanujjaman
Eur. Phys. Jour. A. **62**, 94 (2026)
e-print: arXiv:2403.11630 [hep-ph]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2024)[2]: 2.8

Mój wkład: (autor korespondujący) konceptualizacja problemu; wyprowadzenie nieaddytywnych równań stanu dla magnetycznego ośrodka kwarkowo-gluonowego; opracowanie opisu modelu teoretycznego

P8 Nuclear Modification Factor Using Tsallis Non-extensive Statistics
Sushanta Tripathy, *Trambak Bhattacharyya*, Prakhar Garg, Prateek Kumar, Raghunath Sahoo and Jean Cleymans
Eur. Phys. Jour. A **52**, 289 (2016)
e-print: arXiv:1606.06898 [nucl-th]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2016): 2.833

Mój wkład: Konceptualizacja problemu; wyprowadzenie modelu matematycznego oraz wyrażenia dla jądrowego czynnika supresji; weryfikacja analizy numerycznej; redakcja i korekta manuskryptu

P9 Rapidity spectra in high-energy collisions and longitudinal nuclear suppression from nonadditive statistics
Trambak Bhattacharyya, Maciej Rybczyński, and Zbigniew Włodarczyk
Phys. Lett. B **872** 140076 (2026)
e-print: arXiv:2504.02548 [nucl-th]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2024)[3]: 4.5

Mój wkład: (autor korespondujący) zaproponowanie zastosowania nieaddytywnego równania transportu do badania podłużnej supresji jądrowej; wyprowadzenie modelu teoretycznego; generowanie wykresów porównujących modele teoretyczne z danymi eksperymentalnymi; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

P10 Non-extensive Boltzmann Transport Equation: the Relaxation Time Approximation and Beyond
Trambak Bhattacharyya
Physica A **624**, 128910 (2023)
e-print: arXiv:2104.05949 [nucl-th]

Współczynnik wpływu (Journal Citation Reports 2023): 2.8

Mój wkład: (autor korespondujący) Jako jedyny autor wykonałem wszystkie zadania związane z publikacją.

P11 Jet Quenching of the Heavy Quarks in the Quark-Gluon Plasma and the Nonadditive Statistics
Trambak Bhattacharyya, Eugenio Megias, and Airton Deppman
Phys. Lett. B **856**, 138907 (2024)
e-Print: arXiv: 2405.15679 [hep-ph]

Impact factor (Journal Citation Reports 2024): 4.5

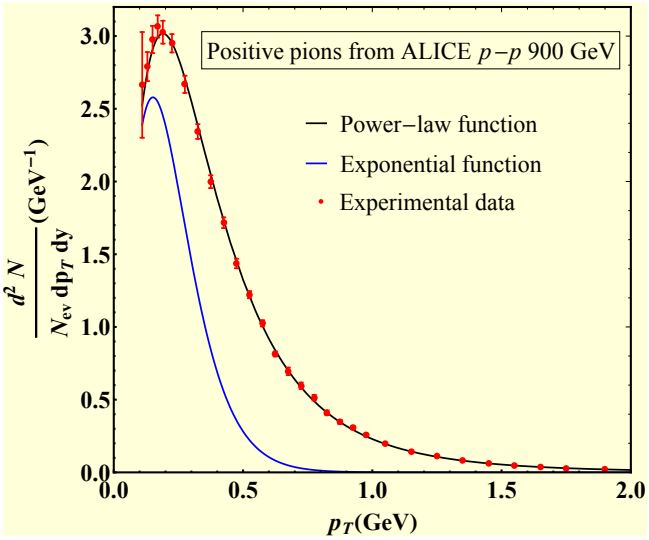
Mój wkład: (autor korespondujący) konceptualizacja problemu; wyprowadzenie modelu teoretycznego; generowanie wykresów; analiza numeryczna oraz porównanie teorii z danymi eksperymentalnymi; przygotowanie oryginalnej wersji manuskryptu

[2] najnowszy stan na dzień 14 maja 2026
[3] najnowszy stan na dzień 14 maja 2026

4.3 Opis celów naukowych oraz najważniejszych wyników

4.3.1 Wprowadzenie

Gdy dwa wysokoenergetyczne jądra atomowe (np. Pb–Pb) zderzają się, tworzą gorące, gęste i silnie oddziałujące medium. Właściwości tego medium wskazują, że może powstawać plazma kwarkowo-gluonowa (QGP), stan materii, w którym Wszechświat istniał kilka mikrosekund po Wielkim Wybuchu. Eksperymenty, takie jak prowadzone w Large Hadron Collider (LHC) Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych (CERN) oraz w Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC) Brookhaven National Laboratory (BNL), zostały zaprojektowane w celu prowadzenia badań w tej dziedzinie. Eksperymenty te stwarzają unikalną możliwość zrozumienia Wszechświata sprzed kilku mikrosekund oraz badania gorącej i gęstej materii opisanej przez kwantową chromodynamikę (QCD).



Rysunek 1: Opis danych eksperymentalnych (uśrednionych po liczbie zdarzeń N_{ev}) z wykorzystaniem różnych funkcji. N: liczba cząstek, p_{T}: pęd poprzeczny, y: pospieszność. Dane eksperymentalne pochodzą ze współpracy ALICE (A Large Ion Collider Experiment) [1].

W eksperymentach [1–5] konsekwentnie obserwowano, że cząstki produkowane w zderzeniach wysokoenergetycznych podążają za rozkładem potęgowym (zob. np. Fig. (1)), co oznacza, że cząstki o wysokim pędzie są wykrywane znacznie częściej niż w zwykłych układach termicznych. W zderzeniach wysokoenergetycznych fenomenologiczny rozkład z ogonem potęgowym, opisujący dane eksperymentalne w bardzo szerokim zakresie pędu, można przedstawić za pomocą następującego czynnika:

$$f \propto \left(1 + (q-1)\frac{\epsilon_p - \mu}{T}\right)^{-\frac{q}{q-1}}. \tag{1}$$

Funkcja fenomenologiczna obejmuje parametr entropowy q, temperaturę T, potencjał chemiczny μ oraz energię pojedynczej cząstki ϵ_p.

Wykazano również, że rozkład stacjonarny ciężkich kwarków wewnątrz plazmy kwarkowo-gluonowej [6] przypomina funkcję f. Ponadto badania symulacyjne [7] wskazują na anomalną dyfuzję pionów w ośrodku QGP. Anomalna dyfuzja, przejawiająca się poprzez spacer Lévy'ego lub skorelowane losowe impulsy pędu, prowadzi do potęgowego stanu stacjonarnego. Obserwacje te, pochodzące z fenomenologii, teorii kinetycznej oraz badań symulacyjnych, wskazują, że układy powstające w zderzeniach wysokoenergetycznych mogą mieć charakter złożony ze względu na efekty pamięci, fluktuacje oraz korelacje dalekiego zasięgu, które przejawiają się poprzez zachowanie potęgowe. Dla takich układów bardziej odpowiednie może być uogólnienie statystyki Boltzmanna-Gibbsa (BG).

Nieaddytywna mechanika statystyczna[4] [8] stanowi przykład uogólnionej statystyki, która pomaga badać złożone układy, takie jak QGP. Zakłada ona nieaddytywną entropię S_{T}, wyrażoną poprzez prawdopodobieństwa mikrostanów p_i, zgodnie z Eq. (2). Entropia S_{T} opiera się na zestawie aksjomatów Abe-Santosa [9, 10], który stanowi uogólnienie aksjomatów Shannona-Khinchina [11, 12] dla statystyki Boltzmanna-Gibbsa. W definicji

[4] Znana również powszechnie jako nieekstensywna mechanika statystyczna

entropii parametr entropowy q, występujący w Eq. (1), określa stopień odchylenia od statystyki Boltzmanna-Gibbsa. W granicy $q \to 1$, $S_{\rm T}$ przechodzi w standardową entropię Boltzmanna-Gibbsa $S_{\rm BG}$

$$S_{\rm T} = -\sum_i \frac{p_i - p_i^q}{1-q} \xrightarrow{q\to 1} S_{\rm BG} = -\sum_i p_i \ln p_i, \tag{2}$$

a rozkład f zbiega do klasycznego wykładniczego rozkładu Boltzmanna-Gibbsa.

Entropia $S_{\rm T}$ nazywana jest entropią nieaddytywną, ponieważ dla dwóch podukładów A oraz B, dla których prawdopodobieństwo łączne spełnia zależność $p_{ij}^{(A+B)} = p_i^{(A)} p_j^{(B)}$, całkowita entropia dana jest wzorem: $S_{\rm T}^{(A+B)} = S_{\rm T}^{(A)} + S_{\rm T}^{(B)} + (1-q) S_{\rm T}^{(A)} S_{\rm T}^{(B)}$. Entropia nieaddytywna staje się addytywna w granicy $q \to 1$ i może być ekstensywna dla szczególnych typów korelacji. Entropia nieaddytywna prowadzi również do struktury Legendre'a, analogicznej do tej występującej w entropii Boltzmanna-Gibbsa.

Chociaż czynnik f został wprowadzony w wielu pracach jako rozkład fenomenologiczny, wynika on z fundamentalnych podstaw teoretycznych fizyki. Wykazano [13], że maksymalizacja entropii nieaddytywnej z ograniczeniami, przedstawionej w Eq. (2), prowadzi do potęgowych prawdopodobieństw równowagowych, które dają nieaddytywny rozkład f przedstawiony w Eq. (1).

Po drugie, rozkład f został wyprowadzony jako stacjonarne rozwiązanie uogólnionego równania transportu Boltzmanna (zob. np. [14]). Rozkłady wykładnicze pojawiają się jako stany stacjonarne konwencjonalnego równania transportu Boltzmanna, które uwzględnia chaos molekularny, gdy rozkład dwucząstkowy można rozłożyć na dwa rozkłady jednocząstkowe. Jednak gdy taka faktoryzacja nie jest możliwa z powodu korelacji, pojawia się uogólnione równanie transportu Boltzmanna oraz niewykładnicze stany stacjonarne, takie jak przedstawione w Eq. (1).

Po trzecie, w formalizmie superstatystyki, uwzględniającym fluktuacje parametrów intensywnych, takich jak temperatura, nieaddytywny rozkład f z Eq. (1) można zapisać jako superpozycję wielu wykładniczych rozkładów Boltzmanna-Gibbsa o różnych temperaturach [15]. W ramach tego podejścia można wykazać, że parametr entropowy q jest związany ze względną wariancją temperatury. Parametr q został również obliczony na podstawie fundamentalnych parametrów QCD, takich jak liczba kolorów i zapachów [16]. Warto zauważyć, że rozkłady potęgowe mogą pojawiać się również z innych przyczyn, takich jak fluktuacje stanu początkowego czy fragmentacja dżetów. Jednak podejścia te mogą nie zachowywać spójności termodynamicznej, która stanowi istotną cechę statystyki nieaddytywnej.

Po tym krótkim wprowadzeniu dotyczącym pochodzenia i znaczenia statystyki nieaddytywnej, stanowiącej centralny temat niniejszego opracowania, przechodzimy do podsumowania zbioru prac w kolejnej sekcji.

4.3.2 O zbiorze prac

Pomimo ogromnego sukcesu statystyki BG, efektywny opis różnych typów układów złożonych wymaga uogólnionego formalizmu. Prace opisane w niniejszym opracowaniu opierają się na obserwacji, że statystyka nieaddytywna zapewnia efektywny i fizycznie uzasadniony opis układów wymagających uogólnienia scenariusza Boltzmanna-Gibbsa, *tj.* układów wykazujących fluktuacje, efekty pamięci oraz korelacje dalekiego zasięgu. Plazma kwarkowo-gluonowa jest złożonym ośrodkiem zdominowanym przez silne oddziaływania i fluktuacje. Przy pomocy statystyki nieaddytywnej charakteryzujemy to medium, badając, w jaki sposób termodynamika, odpowiedź ośrodka oraz reakcja na sondy ulegają modyfikacji po uwzględnieniu fluktuacji i korelacji.

Głównym celem rozprawy jest ocena spójności oraz fizycznych implikacji statystyki nieaddytywnej w zastosowaniu do QGP. W pierwszej kolejności omawiamy pracę P1. Publikacja P1 przedstawia nowe nieaddytywne uogólnienie klasycznego rozkładu Bosego-Einsteina, które opisuje dane eksperymentalne. Eliminuje ono konieczność stosowania procedury regularyzacyjnej proponowanej we wcześniejszych pracach oraz potwierdza związek pomiędzy mechaniką statystyczną, maksymalizacją entropii oraz teoretycznym pochodzeniem rozkładów nieaddytywnych.

Granica klasyczna rozkładu uzyskanego w pracy P1 odpowiada fenomenologicznemu rozkładowi nieaddytywnemu stosowanemu w szerokim zakresie badań. Po ustaleniu wyraźnego związku pomiędzy mechaniką statystyczną a fenomenologicznym rozkładem nieaddytywnym, badania zostały rozwinięte w kierunku analizy widm cząstek, spójności termodynamicznej oraz roli nieuciętych rozkładów w klasycznych i kwantowych zmiennych termodynamicznych w pracach P2, P3 oraz P4.

Ewolucja zaburzeń temperatury oraz gęstości energii została zbadana w pracach P5, P6 oraz P7 w celu wyjaśnienia, w jaki sposób nieaddytywność oraz pole magnetyczne wpływają na odpowiedź ośrodka i jego

stabilność.

Zbiór tych prac obejmuje również badania fizyki nierównowagowej (*tj.* wykraczającej poza nieaddytywną równowagę) poprzez analizę odpowiedzi ośrodka QGP na wysokoenergetyczne sondy w pracach P8, P9, P10 oraz P11 z perspektywy teorii kinetycznej.

Nowatorstwo tego zbioru prac polega na zunifikowanym opisie przebiegającym według następującej trajektorii: mechanika statystyczna i wyprowadzenie nieaddytywnego rozkładu → rola uciętych rozkładów nieaddytywnych w widmach cząstek → od rozkładów uciętych do nieuciętych: obliczanie nieaddytywnych wielkości termodynamicznych oraz badanie ich struktury biegunowej → wielkości termodynamiczne i ewolucja ośrodka → ewolucja wysokoenergetycznych cząstek, stany stacjonarne wykraczające poza Boltzmanna-Gibbsa oraz nieaddytywność.

Przedstawione prace obejmują mechanikę statystyczną, teorię kinetyczną, straty energii w QCD oraz implikacje fenomenologiczne, rozszerzając tym samym charakterystykę ośrodka QGP poza konwencjonalne założenia lokalności i addytywności. Zebrane tutaj prace można podzielić na dwie kategorie:

1. Kategoria I: Nieaddytywna mechanika statystyczna, termodynamika oraz ewolucja zaburzeń w plazmie kwarkowo-gluonowej

2. Kategoria II: Uogólniona teoria kinetyczna oraz zjawiska transportowe w plazmie kwarkowo-gluonowej

Prace P1-P7 należą do kategorii I, natomiast kategoria II obejmuje publikacje P8-P11. W kolejnych sekcjach przedstawiono najważniejsze wyniki opisane w tych pracach. W opisie prac stosujemy jednostki naturalne.

4.3.3 Nieaddytywna mechanika statystyczna i zderzenia wysokoenergetyczne

Niniejsza sekcja poświecona jest podsumowaniu prac P1-P7. Praca P1 opiera się na równowagowej mechanice statystycznej, łącząc fenomenologię z formalizmem teoretycznym, pokazując, w jaki sposób fenomenologiczny rozkład nieaddytywny wynika z maksymalizacji entropii. Prace P2-P7 obejmują nieaddytywną termodynamikę oraz zmienne termodynamiczne, które stanowią istotne wejście do badania ewolucji ośrodka.

Oscylator harmoniczny w ośrodku nieaddytywnym oraz uogólniony rozkład Bosego-Einsteina

W niniejszej sekcji omawiamy statystyczno-mechaniczne pochodzenie nieaddytywnego rozkładu jednocząstkowego (Eq. 1) z uogólnionego rozkładu Bosego-Einsteina, zgodnie z P1. Rozkłady jednocząstkowe otrzymywane z maksymalizacji entropii są istotne ze względu na ich zastosowanie do obliczania eksperymentalnie obserwowanych widm pędu poprzecznego w zderzeniach wysokoenergetycznych. Obserwuje się, że rozkłady pędu poprzecznego bozonów, takich jak piony, powstające w zderzeniach wysokoenergetycznych, nie mogą być opisane przy użyciu klasycznego rozkładu Bosego-Einsteina. W związku z tym wyprowadzamy nieaddytywne uogólnienie rozkładu Bosego-Einsteina i badamy, czy opisuje ono widma bozonowe.

Nieaddytywne rozkłady jednocząstkowe obliczane są poprzez maksymalizację entropii nieaddytywnej z Eq. (2) przy ograniczeniach takich jak normalizacja prawdopodobieństwa, ustalona średnia energia oraz ustalona średnia liczba cząstek (dla zespołu wielkiego kanonicznego). Zbiór równowagowych prawdopodobieństw otrzymany z ekstreminacji entropii nieaddytywnej ma postać rozkładu potęgowego

$$p_i = \left[1 + \frac{q-1}{q}\frac{\Lambda - E_i + \mu N_i}{T}\right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{3}$$

przy spełnieniu warunku normalizacji prawdopodobieństwa,

$$\sum_i \left[1 + \frac{q-1}{q}\frac{\Lambda - E_i + \mu N_i}{T}\right]^{\frac{1}{q-1}} = 1, \tag{4}$$

gdzie Λ jest związana z funkcją partycji, a E_i (N_i) oznacza energię (liczbę cząstek) w i^{tym} mikro-stanie. W granicy $q \to 1$ z Eq. (3) otrzymuje się rozkład prawdopodobieństw Boltzmanna-Gibbsa.

Korzystając z reprezentacji całkowej funkcji gamma, potęgowy zbór prawdopodobieństw, normalizacja prawdopodobieństwa oraz nieaddytywne wartości średnie mogą zostać zapisane jako

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda-E_i+\mu N_i}{T}\right]} dt; \\ \sum_i p_i &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda-\Omega_{\rm G}(\beta')}{T}\right]} dt = 1. \end{aligned} \tag{5a}$$

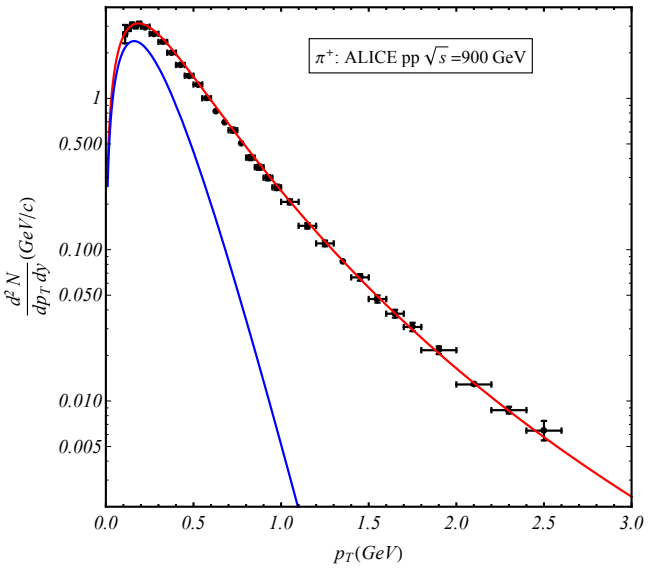
$$\langle Q\rangle = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda}{T}\right]} Z_{\rm G}\left(\beta'\right) \langle Q\rangle_{\rm G}(\beta') dt, \tag{5b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Omega_{\rm G}\left(\beta'\right) &= -\frac{1}{\beta'} \ln Z_{\rm G}\left(\beta'\right); \;\; Z_{\rm G}\left(\beta'\right) = \sum_i e^{-\beta'(E_i-\mu N_i)}; \\ \langle Q\rangle_{\rm G}\left(\beta'\right) &= \frac{1}{Z_{\rm G}\left(\beta'\right)} \sum_i Q_i e^{-\beta'(E_i-\mu N_i)}; \\ \text{oraz} \quad \beta' &= t(1-q)/qT. \end{aligned} \tag{6}$$

Korzystając z Eq. (5b), nieaddytywne rozkłady jednocząstkowe mogą być wyrażone w kategoriach funkcji partycji Boltzmanna-Gibbsa $Z_{\rm G}$ oraz jednocząstkowych rozkładów Boltzmanna-Gibbsa $\langle n_{p\sigma}\rangle_{\rm G}$ (σ może oznaczać na przykład spin) w następujący sposób

$$\langle n_{p\sigma}\rangle = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{q}{1-q}} e^{-t\left[1+\frac{q-1}{q}\frac{\Lambda}{T}\right]} \; Z_{\rm G}\left(\beta'\right) \; \langle n_{p\sigma}\rangle_{\rm G}(\beta') \, dt. \tag{7}$$



Rysunek 2: Rysunek zaadaptowany z P1 przedstawiający widmo π^+ opisane za pomocą rozkładu Bosego-Einsteina BG (linia niebieska) oraz nieaddytywnego rozkładu Bosego-Einsteina (linia czerwona) (Eq. (9)). Wartości parametrów wynoszą: $q = 0.8795 \pm 0.004391$, $T = 0.0883 \pm 0.002957$ GeV, $R = 3.873 \pm 0.1063$ fm. Dane eksperymentalne pochodzą z pracy Ref. [1].

Wyprowadzamy teraz nieaddytywne uogólnienie rozkładu Bosego-Einsteina, rozważając oscylator harmoniczny jednego modu w nieaddytywnym zbiorniku cieplnym. Oscylator harmoniczny jednego modu zanurzony

w zbiorniku termicznym opisywanym statystyką Boltzmanna-Gibbsa podlega rozkładowi Bosego-Einsteina, a ten sam układ badany w ramach statystyki stanów nieaddytywnych powinien prowadzić do uogólnienia klasycznego rozkładu Bosego-Einsteina.

Podstawiając funkcję partycji Boltzmanna-Gibbsa oraz klasyczny rozkład Bosego-Einsteina do Eq. (7) (przyjmując potencjał chemiczny $\mu = 0$), otrzymujemy nieaddytywny rozkład Bosego-Einsteina.

$$\begin{aligned}\langle n_{p\sigma}\rangle &= \left(\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left[\zeta\left(\frac{q}{1-q},\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\right.\\ &\left.-\left(\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\zeta\left(\frac{1}{1-q},\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\right],\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $\epsilon_p = \sqrt{p^2+m^2}$ jest energią pojedynczej cząstki o masie m oraz trójwymiarowym pędzie o module $p \equiv |\vec{p}|$, a Λ jest wyznaczane z warunku normalizacji prawdopodobieństwa.

Korzystając z powyższego rozkładu jednocząstkowego, nieaddytyczne bozonowe widmo pędu poprzecznego można zapisać jako

$$\begin{aligned}\frac{d^2N}{dp_{\rm T}dy} &= \frac{gV}{(2\pi)^2}p_{\rm T}m_{\rm T}\cosh(y)\left(\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left[\zeta\left(\frac{q}{1-q},\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\right.\\ &\left.-\left(\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\zeta\left(\frac{1}{1-q},\frac{qT}{(1-q)\varepsilon_p}-\frac{\Lambda}{\varepsilon_p}\right)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

W powyższym równaniu $p_{\rm T}$ oznacza pęd poprzeczny, $m_{\rm T} = \sqrt{p_{\rm T}^2+m^2}$ jest masą poprzeczną, a y jest pośpiesznością.

Jak pokazano na Fig. (2), powyższy nieaddytywny bozonowy rozkład dobrze opisuje eksperymentalne widmo pędu poprzecznego pionów, podczas gdy klasyczny rozkład Bosego-Einsteina nie odtwarza danych. Analogiczny wniosek został potwierdzony dla innych bozonów, takich jak kaony, oraz dla innych energii zderzeń, gdzie zakres pędu poprzecznego $p_{\rm T}$ może być znacznie większy (do $\sim$ 20 GeV). W granicy $q \to 1$ równanie (9) przechodzi w klasyczny rozkład Bosego-Einsteina Boltzmanna-Gibbsa. Ponadto, gdy energia pojedynczej cząstki przewyższa inne skale energetyczne (takie jak temperatura), równanie Eq. (9) zbiega do dualnej ($q' \to q^{-1}$) postaci fenomenologicznego nieaddytywnego rozkładu zawierającego czynnik f dany równaniem Eq. (1).

Podsumowując, w niniejszej sekcji zastosowano metodę maksymalizacji entropii do wyprowadzenia nieaddytywnego uogólnienia rozkładu Bosego-Einsteina, który opisuje dane eksperymentalne w zakresie, w którym klasyczny rozkład Bosego-Einsteina wykazuje odchylenia od obserwacji. Otrzymany rozkład przechodzi w klasyczny fenomenologiczny rozkład nieaddytywny stosowany w literaturze. Po ustaleniu tego związku przechodzimy w kolejnej sekcji do analizy termodynamiki przy użyciu rozkładu jednocząstkowego.

Rozwinięcie w $(q-1)$ oraz jego ważność w ograniczonym zakresie pędu

Praca P2 bada wielkości termodynamiczne z wykorzystaniem rozwinięcia $(q-1)$ klasycznego rozkładu nieaddytywnego, wyprowadzonego z nieaddytywnej mechaniki statystycznej. Rozwinięcie to umożliwia analizę stopnia odchylenia od konwencjonalnej statystyki Boltzmanna-Gibbsa. Pozwala ono również na wyznaczenie analitycznych postaci wielkości termodynamicznych, takich jak ciśnienie (P), gęstość energii (ϵ), gęstość entropii (s) oraz gęstość liczby cząstek (n), a także na analizę struktury Legendre'a w nieaddytywnej termodynamice. Zwarte postacie analityczne wielkości termodynamicznych dostarczają przejrzystych i ogólnych wyrażeń, które mogą zmniejszyć czas obliczeń, jeżeli zostaną uwzględnione w symulacjach. Umożliwiają one także wiarygodne badanie przybliżeń i granic, a często ujawniają struktury matematyczne prowadzące do wniosków fizycznych, które nie są widoczne w obliczeniach numerycznych. W fenomenologii wysokich energii obserwuje się często, że parametr entropowy q opisujący odchylenie od statystyki Boltzmanna-Gibbsa mieści się w zakresie od 1 do 1.2. Na tej podstawie badano wielkości wynikające z obcięcia rzędu $\mathcal{O}(q-1)$ rozkładu nieaddytywnego.

Wyrażając energię pojedynczej cząstki ϵ_p o masie m (przy potencjale chemicznym μ) w kategoriach masy poprzecznej $m_{\rm T}$ oraz pospieszności y, nieaddytywne widmo pędu poprzecznego ma postać:

$$\frac{dN}{dp_{\rm T}dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2}p_{\rm T}m_{\rm T}\cosh y\left[1+(q-1)\frac{m_{\rm T}\cosh y-\mu}{T}\right]^{-\frac{q}{q-1}}, \tag{10}$$

gdzie g oznacza krotność degeneracji, a V jest objętością układu. W równaniu (10) czynnik znajdujący się w nawiasach kwadratowych (identyczny z f w równaniu (1)) nazywany jest rozkładem jednocząstkowym, który definiuje zmienne termodynamiczne P, ϵ oraz n. Rozwinięcie czynnika względem $(q-1)$, obcięte do rzędu $\mathcal{O}(q-1)$, można zapisać jako

$$\frac{d^2N}{dp_Tdy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_T m_T \mathrm{cosh}y \, \mathrm{e}^{-\frac{m_T \mathrm{cosh}y - \mu}{T}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{2} \frac{m_T \mathrm{cosh}y - \mu}{T} \left(-2 + \frac{m_T \mathrm{cosh}y - \mu}{T} \right) \right\} \tag{11}$$

Na podstawie tego rozwinięcia, ciśnienie termodynamiczne P, zdefiniowane jako całka po trójwymiarowym pędzie (p), może zostać wyrażone za pomocą zmodyfikowanych funkcji Bessela drugiego rodzaju, K_i, z argumentem $a = m/T$ jako:

$$\begin{aligned} P &= g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3\epsilon_p} f \\ &\simeq \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \frac{p^2}{3\epsilon_p} \left[\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon_p - \mu}{T}} + (q-1) \frac{\epsilon_p - \mu}{2T} \left(-2 + \frac{\epsilon_p - \mu}{T} \right) \mathrm{e}^{-\frac{\epsilon_p - \mu}{T}} \right] \\ &= \frac{g \mathrm{e}^{\frac{\mu}{T}} T^4 a^2 K_2(a)}{2\pi^2} + \frac{g(q-1)\mathrm{e}^{\frac{\mu}{T}} T^4}{4\pi^2} \left[a^4 K_2(a) + 3a^3 K_3(a) - 2a^3 b K_3(a) + a^2 b^2 K_2(a) + 2a^2 b K_2(a) \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

W równaniach (11) oraz (12) wyrazy rzędu $\mathcal{O}(q-1)$ ukazują odchylenie od standardowej statystyki Boltzmanna-Gibbsa. Wyrażenia te przechodzą do swoich odpowiedników Boltzmanna-Gibbsa w granicy $q \to 1$. Podobnie, inne zmienne termodynamiczne, takie jak gęstość liczbowa oraz gęstość energii, są obliczane do rzędu $\mathcal{O}(q-1)$ i spełniają warunek spójności termodynamicznej, co oznacza, że równość $n = \partial P/\partial\mu$ jest zachowana. Chociaż wartość parametru q jest bliska 1, rozwinięcie widm pędu poprzecznego względem $(q-1)$ w równaniu (11) odbiega od danych eksperymentalnych.

Obecnie badamy uwzględnienie przepływu radialnego w rozwinięciu względem $(q-1)$, zastępując energię jednocząstkową jej kowariantnym uogólnieniem wyrażonym poprzez iloczyn skalarny czteropędu p^μ oraz czteroprędkości płynu u^μ. Aby uzyskać ten wynik, rozważamy następujący ansatz we współrzędnych cylindrycznych:

$$p^\mu = (m_T \mathrm{cosh}y, p_T \mathrm{cos}\phi, p_T \mathrm{sin}\phi, m_T \mathrm{sinh}y) \tag{13}$$

$$u^\mu = (\gamma \mathrm{cosh}\zeta, \gamma v \mathrm{cos}\alpha, \gamma v \mathrm{sin}\alpha, \gamma \mathrm{sinh}\zeta), \tag{14}$$

gdzie $\phi(\alpha)$ jest kątem azymutalnym cząstki (prędkości płynu), v oznacza trójprędkość płynu, a ζ jest czasoprzestrzenną szybkością. Widmo zostaje wyprowadzone przy użyciu zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, I_i oraz K_i, z argumentami $r \equiv \gamma m_T/T$ oraz $s \equiv \gamma v p_T/T$, jak poniżej:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p_T}\frac{d^2N}{dp_Tdy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} \Big\{ 2T[rI_0(s)K_1(r) - sI_1(s)K_0(r)] - (q-1)Tr^2 I_0(s)[K_0(r) + K_2(r)] \\ &+4(q-1)\, Trs I_1(s)K_1(r) - (q-1)Ts^2 K_0(r)[I_0(s) + I_2(s)] + \frac{(q-1)}{4} Tr^3 I_0(s)[K_3(r) + 3K_1(r)] \\ &-\frac{3(q-1)}{2} Tr^2 s[K_2(r) + K_0(r)]I_1(s) + \frac{3(q-1)}{2} Ts^2 r[I_0(s) + I_2(s)]K_1(r) \\ &-\frac{(q-1)}{4} Ts^3[I_3(s) + 3I_1(s)]K_0(r) \Big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Chociaż uwzględnienie przepływu radialnego prowadzi do lepszego opisu danych dotyczących zderzeń ołowiu z ołowiem, rozwinięcie względem $(q-1)$ oraz jego obcięcie wpływają na właściwości zbieżności wyników, ograniczając je przez ilorazy obejmujące q, energię oraz temperaturę. W związku z tym istnieje potrzeba zbadania zmiennych termodynamicznych masywnych cząstek bez stosowania tego obcięcia i przybliżenia. Temu zagadnieniu poświęcona jest następująca podsekcja, omawiająca prace P3 oraz P4.

Nieaddytywne zmienne termodynamiczne: wyprowadzenie dokładnych wyników analitycznych oraz wyznaczenie górnej granicy parametru q

W poprzedniej sekcji pokazano, że obcięcie rozwinięcia względem $(q-1)$ dla zmiennych termodynamicznych prowadzi do ograniczeń przestrzeni fazowej. W tej sekcji omawiamy dokładne analityczne zamknięte postacie nieaddytywnych zmiennych termodynamicznych, wyprowadzone w pracach P3 oraz P4. W celu uzyskania tych wyników zastosowano reprezentację całki konturowej Mellina-Barnesa dla potęgowego rozkładu f. Technika Mellina-Barnesa jest szeroko stosowana w kwantowej teorii pola do obliczania wkładów fluktuacji kwantowych. Jednak, zgodnie z naszą najlepszą wiedzą, metoda ta nie była dotychczas szeroko badana w kontekście nieaddytywnej termodynamiki. Metoda ta prowadzi do zamkniętych wyrażeń dla nieaddytywnych zmiennych termodynamicznych w postaci funkcji hipergeometrycznych oraz ujawnia istnienie biegunów ograniczających dopuszczalny zakres parametru q. Metodologia obliczania ciśnienia termodynamicznego została podsumowana poniżej.

Metodologia (rozkład klasyczny)

Krok 1: Z równania (12) ciśnienie termodynamiczne dane jest przez następującą całkę (przy założeniu braku zależności kątowej):

$$\begin{aligned} P &= g\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{3\epsilon_p}\, f \\ &= \frac{g}{6\pi^2}\int_0^\infty dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2}} \frac{1}{\left(1+(q-1)\frac{\sqrt{p^2+m^2}-\mu}{T}\right)^{\frac{q}{q-1}}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Krok 2: Następnie wprowadza się przeskalowaną zmienną pędu $k = p/m$, a także korzysta się z reprezentacji Mellina-Barnesa dla funkcji potęgowej, danej następującym wyrażeniem.

$$\frac{1}{(X+Y)^\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\Gamma(-z)\Gamma(z+\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \frac{Y^z}{X^{\lambda+z}}\, dz, \tag{17}$$

gdzie $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ oraz $\mathrm{Re}(\epsilon) \in (-\mathrm{Re}(\lambda), 0)$. Stosując podstawienia $X = m(q-1)\sqrt{1+k^2}/T$, $Y = 1-(q-1)\mu/T$ oraz $\lambda = q/(q-1) \in \mathbb{R}^+ \ \forall \ q > 1$, równanie (16) można zapisać jako iloczyn dwóch niezależnych całek po zmiennej zespolonej z oraz przeskalowanym pędzie k. Wynik całkowania po k można wyrazić w postaci funkcji Gamma.

Krok 3: Całkowanie zespolone po zmiennej z wykonuje się metodą residuów. Kontur całkowania jest domykany zgodnie z ruchem wskazówek zegara w taki sposób, aby objąć bieguny funkcji Gamma. Jednak zbieżność tej całki wymaga warunku $q > 1 + T/(m+\mu)$ (obszar górny). W celu wyznaczenia ciśnienia termodynamicznego w obszarze dolnym $q \leq 1 + T/(m+\mu)$ stosuje się analityczną kontynuację wyniku otrzymanego dla obszaru górnego.

Poniżej przedstawiono końcowy wynik dla ciśnienia termodynamicznego nieaddytywnego gazu masywnych cząstek klasycznych przy niezerowym potencjale chemicznym, wyznaczony w górnym obszarze q P3:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{U}} &= \frac{g\, m^4}{16\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{T}{(q-1)\, m}\right)^{\frac{q}{(q-1)}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{4-3q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q-1}{2(q-1)}\right)} \times {}_2F_1\left(\frac{q}{2(q-1)}, \frac{4-3q}{2(q-1)}, \frac{1}{2}; \left(\frac{(q-1)\,\mu - T}{(q-1)\, m}\right)^2\right)\right. \\ &\left. +2\left(\frac{(q-1)\,\mu - T}{(q-1)\, m}\right) \times \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2(q-1)}\right)} \times {}_2F_1\left(\frac{2q-1}{2(q-1)}, \frac{3-2q}{2(q-1)}, \frac{3}{2}; \left(\frac{(q-1)\,\mu - T}{(q-1)\, m}\right)^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Ciśnienie termodynamiczne nieaddytywnego gazu masywnych cząstek klasycznych przy niezerowym potencjale chemicznym, wyznaczone w dolnym obszarze q, dane jest przez P3:

$$P_{\rm L} = \frac{g\,m^4}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{T/2}{T-\mu\,(q-1)}\right)^{\frac{q}{(q-1)}}\left[\frac{(q-1)^2\,(3-q)\,\Gamma\left(\frac{1}{(q-1)}\right)}{(4-3q)\,(3-2q)\,(2-q)\,\Gamma\left(\frac{1+q}{2(q-1)}\right)}\right] \times {}_2F_1\left(\frac{2q-1}{2(q-1)},\frac{q}{2(q-1)},\frac{3-q}{2(q-1)},1-\left(\frac{(q-1)\,m}{T-\mu\,(q-1)}\right)^2\right),$$

gdzie ${}_2F_1$ jest funkcją hipergeometryczną [17].

Co istotne, zarówno $P_{\rm U}$, jak i $P_{\rm L}$ posiadają biegun w punkcie $q = 4/3$. Biegun ten oznacza załamanie struktury Legendre'a nieaddytywnej termodynamiki, ponieważ zmienne termodynamiczne rozbiegają się w tym punkcie. Pojawienie się bieguna można zrozumieć na podstawie równania (16). Dla dużych pędów integral zachowuje się jak $p^{4-q/(q-1)}$. Zbieżność całki wymaga

$$4 < \frac{q}{q-1} \Rightarrow q < \frac{4}{3}. \tag{19}$$

Jeśli rozważamy gaz w d wymiarach przestrzennych, warunek zbieżności przyjmuje postać

$$q < 1 + \frac{1}{d} \equiv q_{\rm crit}. \tag{20}$$

W związku z tym, w przeciwieństwie do równowagi Boltzmanna-Gibbsa, stan równowagi nieaddytywnej zależy od wymiaru przestrzeni. Jedynie dla $q < q_{\rm crit}$ momenty są zbieżne i istnieje spójna termodynamika nieaddytywna.

Rozszerzenie do dziedziny kwantowej

W poprzedniej sekcji omówiono nieaddytywną termodynamikę obejmującą klasyczny rozkład Maxwella-Boltzmanna (MB) w uogólnionej formie nieaddytywnej. Wyniki uzyskane w poprzedniej sekcji zostały uogólnione do dziedziny kwantowej w pracy P4. W tym celu przyjęto następujące fenomenologiczne kwantowe (B: bozony; F: fermiony) rozkłady jednocząstkowe (znak dodatni dla fermionów, znak ujemny dla bozonów):

$$f_{\rm B/F} = \frac{1}{\left(1+(q-1)\frac{E_p-\mu}{T}\right)^{\frac{q}{q-1}} \pm 1}. \tag{21}$$

Jak w przypadku rozkładu f, fenomenologiczny rozkład $f_{\rm B/F}$ można otrzymać z warunkowej maksymalizacji nieaddytywnej entropii dla gazu doskonałego [13]. Jednak to, czy równanie (21) można otrzymać z podejścia oscylatorowego opisanego w sekcji (4.3.3) przy pewnych przybliżeniach (np. faktoryzacji), pozostaje nadal otwartym problemem.

Aby obliczyć ciśnienie układu kwantowego, stosujemy te same kroki, takie jak reskalowanie, wykorzystanie reprezentacji Mellina-Barnesa oraz zastosowanie twierdzenia o residuach, które zostały użyte w poprzedniej sekcji. Jednakże istnieje jeden krok pośredni, który pozwala wyrazić rozkłady kwantowe w postaci rozkładów klasycznych. Podobnie jak w statystyce Boltzmanna-Gibbsa, nieaddytywne rozkłady kwantowe mogą być zapisane jako nieskończona suma klasycznych nieaddytywnych rozkładów.

$$\frac{1}{\left[1+\frac{(q-1)}{T}\sqrt{p^2+m^2}\right]^{\frac{q}{q-1}} \pm 1} = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{a(s+1)}\left(1+\frac{(q-1)}{T}\sqrt{p^2+m^2}\right)^{-\frac{qs}{q-1}}, \tag{22}$$

gdzie $a = 0$ $(a = 1)$ odpowiada rozkładowi bozonowemu (fermionowemu), a μ przyjmowane jest równe zero.

Po wyrażeniu rozkładów kwantowych w postaci rozkładów klasycznych, dokładnie te same kroki jak w poprzedniej sekcji prowadzą do następujących wyrażeń w górnym i dolnym obszarze q. Dla bozonów ciśnienie

w obszarze górnym ($q > 1 + T/m$) dane jest przez P4

$$P_{\mathrm{U,B}} = \sum_{s=1}^{s_0} \frac{gm^4}{32\pi^2\Gamma\left(\frac{qs}{q-1}\right)} \left(\frac{2T}{m(q-1)}\right)^{\frac{qs}{q-1}} \left[\Gamma\left(\frac{qs}{2(q-1)}\right)\Gamma\left(\frac{qs}{2(q-1)}-2\right) \times {}_2F_1\left(\frac{qs}{2(q-1)}, \frac{qs}{2(q-1)}-2; \frac{1}{2}; \frac{T^2}{m^2(q-1)^2}\right) - \frac{2T}{m(q-1)}\Gamma\left(\frac{qs-3q+3}{2(q-1)}\right) \times \Gamma\left(\frac{qs+q-1}{2(q-1)}\right) {}_2F_1\left(\frac{qs-3q+3}{2(q-1)}, \frac{qs+q-1}{2(q-1)}; \frac{3}{2}; \frac{T^2}{m^2(q-1)^2}\right)\right]. \tag{23}$$

W obszarze dolnym ($q < 1 + T/m$) (jak otrzymano w P4)

$$P_{\mathrm{L,B}} = \frac{gT^4}{16(q-1)^4} \sum_{s=1}^{s_0} {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{qs}{2(q-1)}-2, \frac{qs}{2(q-1)}-\frac{3}{2}; \frac{qs}{q-1}-\frac{3}{2}; 1-\frac{m^2(q-1)^2}{T^2}\right) \times \sec\left(\frac{\pi qs}{q-1}\right) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{qs-4q+4}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q(s-5)+5}{2(1-q)}\right)\Gamma\left(\frac{qs}{2(1-q)}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{qs}{2(q-1)}+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{qs}{2(q-1)}-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{qs}{2(q-1)}\right)\Gamma\left(\frac{qs}{2(1-q)}+1\right)\Gamma\left(\frac{qs}{2(1-q)}+3\right)}\right], \tag{24}$$

gdzie ${}_2\tilde{F}_1\left(a,b;c;z\right) = {}_2F_1\left(a,b;c;z\right)/\Gamma(c)$ jest zregularizowaną funkcją hipergeometryczną. Dla fermionów wyniki są bardzo podobne, z wyjątkiem czynnika wstępnego $(-1)^{s+1}$ pochodzącego z rozwinięcia pokazanego w równaniu (22).

Nieskończona suma wynikająca z równania (22) zostaje zastąpiona górnym obcięciem s_0 w równaniach (23) oraz (24). Wartość s_0 zależy od masy cząstki oraz od wymaganego stopnia zgodności pomiędzy wynikami analitycznymi i numerycznymi. Z równania (23) wynika, że występuje biegun w $q = 4/3$, zawarty w czynniku gamma $\Gamma\left(qs/[2(q-1)]-2\right)$, gdy rozważamy najniższy wyraz szeregu $s = 1$.

Inne nieaddytywne zmienne termodynamiczne

Chociaż w poprzednich paragrafach przedstawiono wyniki oraz metodologię obliczania wyłącznie ciśnienia termodynamicznego, pozostałe zmienne (gęstość liczby cząstek n, gęstość entropii s oraz gęstość energii ϵ) mogą zostać wyznaczone przy zastosowaniu warunku spójności termodynamicznej.

$$\begin{aligned} n &= \left.\frac{\partial P}{\partial \mu}\right|_T, \; s = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_\mu, \\ \epsilon &= T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_\mu + \mu\left.\frac{\partial P}{\partial \mu}\right|_T - P. \end{aligned} \tag{25}$$

Pochodne funkcji hipergeometrycznych występujących w tych wyrażeniach mogą być obliczone przy użyciu następującej reguły łańcuchowej (na przykład):

$$\frac{\partial\, {}_2F_1[a,b,c;f(T,\mu)]}{\partial T} = \frac{\partial\, {}_2F_1[a,b,c;f(T,\mu)]}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{a\,b}{c}\; {}_2F_1[a+1,b+1,c+1;f]\frac{\partial f}{\partial T}. \tag{26}$$

Związek z fenomenologią QGP oraz granica bezmasowa

Ponieważ widma cząstek wskazują, że w fenomenologii QGP statystyka Boltzmanna-Gibbsa nie jest wystarczająca, istotne jest wyznaczenie ciśnienia, gęstości energii oraz innych zmiennych termodynamicznych w statystyce nieaddytywnej. Zmienne te determinują ewolucję hydrodynamiczną QGP poprzez równania stanu. Jako wstępny test porównano analityczne i numeryczne oszacowania ciśnienia w gazie pionów i otrzymano zgodność do co najmniej siedmiu cyfr znaczących. Ponadto ciśnienie nieaddytywne jest kilkukrotnie (~ 10 razy) większe niż jego odpowiednik Boltzmanna-Gibbsa. Podkreśla to znaczenie korelacji i fluktuacji oraz

wkładu ogonów wysokopędowych. Chociaż wyniki analityczne są poprawne dla dowolnych stopni swobody (kwarków/gluonów/hadronów), poniżej przedstawiono wybrane oszacowania numeryczne obliczone w P4 z wykorzystaniem parametrów zamrożenia (freeze-out) uzyskanych z danych eksperymentalnych. Dla gazu dodatnio naładowanych pionów produkowanych w RHIC ($\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV Au-Au, $q = 1.090$ oraz $T = 0.117$ GeV [18]) ciśnienie termodynamiczne wynosi 3.0089×10^{-5} GeV^4. Z kolei dla wszystkich naładowanych cząstek produkowanych w LHC ($\sqrt{s_{\rm NN}} = 2760$ GeV Pb-Pb, $q = 1.135$ oraz $T = 0.096$ GeV [19]) otrzymujemy 6.5733×10^{-5} GeV^4. We wszystkich tych obliczeniach górny obcięcie s_0 zmienia się. Podczas gdy dla cząstek masywnych zbieżność uzyskuje się już po uwzględnieniu 2–5 wyrazów, dla cząstek bezmasowych s_0 może osiągać wartości nawet rzędu 20.

Chociaż oszacowania numeryczne przedstawione w poprzednim paragrafie dotyczą wyłącznie masywnych hadronów, przypadek bezmasowy jest również istotny przy analizie stopni swobody partonowych (np. gluonów). Jak pokazano w P5, fluktuacje (będące źródłem nieaddytywności) występują już przed fazą freeze-out, gdy dominują stopnie swobody partonowe. W granicy bezmasowej nieaddytywne zmienne termodynamiczne dla statystyki Maxwella-Boltzmanna (cząstek) mają postać następujących wyrażeń (jak otrzymano w P3):

$$P = \frac{gT^4}{6\pi^2}\frac{1}{(2-q)(3/2-q)(4/3-q)}; \epsilon = \frac{gT^4}{2\pi^2}\frac{1}{(2-q)(3/2-q)(4/3-q)}; n = \frac{gT^3}{2\pi^2}\frac{1}{(2-q)(3/2-q)}. \tag{27}$$

Z wyrażenia na ciśnienie obserwujemy, że biegun w $q = 4/3$ uległ obecnie przesunięciu do mianownika w postaci bieguna prostego, podczas gdy w przypadku masywnym znajdował się on wewnątrz funkcji Gamma. W granicy $q \to 1$ otrzymujemy znane wyniki Boltzmanna-Gibbsa. Kwantowe rozszerzenie bezmasowych nieaddytywnych zmiennych termodynamicznych zostało omówione w P6. Chociaż niniejsza sekcja poświęcona jest dyskusji wyników z P3 i P4, dla kompletności zestawiamy również wyniki z P6 (wyrażone w postaci funkcji digamma $\psi^{(0)}$ oraz transcedenty Lercha Φ [17]).

Dla bezmasowych bozonów zmienne termodynamiczne dane są przez

$$\begin{aligned}
P_{\rm B} &= \frac{gT^4}{6\pi^2(q-1)^3q}\left[3\psi^{(0)}\left(\frac{3}{q}-2\right)+\psi^{(0)}\left(\frac{1}{q}\right)-3\psi^{(0)}\left(\frac{2}{q}-1\right)-\psi^{(0)}\left(\frac{4}{q}-3\right)\right] \equiv P_{b,1}T^4,\\
\epsilon_{\rm B} &= \frac{gT^4}{2\pi^2(q-1)^3q}\left[3\psi^{(0)}\left(\frac{3}{q}-2\right)+\psi^{(0)}\left(\frac{1}{q}\right)-3\psi^{(0)}\left(\frac{2}{q}-1\right)-\psi^{(0)}\left(\frac{4}{q}-3\right)\right] \equiv \epsilon_{b,1}T^4,\\
n_{\rm B} &= \frac{gT^3}{2\pi^2(q-1)^2q}\left[2\psi^{(0)}\left(\frac{2}{q}-1\right)-\psi^{(0)}\left(\frac{3}{q}-2\right)-\psi^{(0)}\left(\frac{1}{q}\right)\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

Dla bezmasowych fermionów zmienne termodynamiczne dane są przez

$$\begin{aligned}
P_{\rm F} &= \frac{gT^4}{6\pi^2(q-1)^3q}\left[3\Phi\left(-1,1,\frac{2}{q}-1\right)-3\Phi\left(-1,1,\frac{3}{q}-2\right)+\Phi\left(-1,1,\frac{4}{q}-3\right)-\Phi\left(-1,1,\frac{1}{q}\right)\right]\\
&\equiv P_{f,1}T^4\\
\epsilon_{\rm F} &= \frac{gT^4}{2\pi^2(q-1)^3q}\left[3\Phi\left(-1,1,\frac{2}{q}-1\right)-3\Phi\left(-1,1,\frac{3}{q}-2\right)+\Phi\left(-1,1,\frac{4}{q}-3\right)-\Phi\left(-1,1,\frac{1}{q}\right)\right],\\
&\equiv \epsilon_{f,1}T^4\\
n_{\rm F} &= \frac{gT^3}{2\pi^2(q-1)^2q}\left[-2\Phi\left(-1,1,\frac{2}{q}-1\right)+\Phi\left(-1,1,\frac{3}{q}-2\right)+\Phi\left(-1,1,\frac{1}{q}\right)\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Zmienne termodynamiczne dostarczają równań stanu, które determinują ewolucję hydrodynamiczną QGP. Oprócz tego są one również istotne do badania ewolucji nieliniowych zaburzeń wewnątrz QGP, powstających wskutek przejścia cząstek wysokoenergetycznych. Kwantowe nieaddytywne zmienne termodynamiczne (równania (28) oraz (29)) zostały wyprowadzone i wykorzystane w P6 do badania ewolucji zaburzeń gęstości energii w idealnym[5] QGP. Jednak przed omówieniem P6 krótko przedstawiamy inne podejście opisane w P5, które pozwala wyjaśnić, w jaki sposób może ewoluować fluktuacja temperatury w ośrodku nierównowagowym. Ponieważ fluktuacja temperatury jest związana z fluktuacją gęstości energii, P5 stanowi logiczne przejście przed

[5] Badanie to zostało następnie uogólnione na płyny lepkie w pracy [21]

omówieniem P6 oraz P7.

4.3.4 Odpowiedź ośrodka: liniowa i nieliniowa ewolucja

W tej sekcji podsumowujemy badania przedstawione w P5, P6 oraz P7. Badania te można szeroko sklasyfikować jako analizy liniowych i nieliniowych zaburzeń w ośrodku. Zaburzenia te mogą powstawać, gdy wysokoenergetyczne cząstki przemieszczają się przez ośrodek. Na przykład ciężki kwark przechodzący przez ośrodek QGP wywołuje zaburzenie na tle gęstości energii tła. Czasami takie zaburzenia mogą być analizowane przy pomocy linearyzacji, gdy ich amplituda jest mała. W pracy P5 rozważamy liniową ewolucję fluktuacji temperatury oraz jej związek z nieaddytywną statystyką przy wykorzystaniu równania transportu Boltzmanna. Jednak linearyzacja zawodzi dla większych zaburzeń, gdy istotna staje się ewolucja nieliniowa. Tego rodzaju procesy są modyfikowane przez nieaddytywny charakter QGP, jak omówiono w P6.

Ewolucja fluktuacji temperatury

W tej podsekcji podsumowujemy pracę dotyczącą ewolucji fluktuacji temperatury w ośrodku, przedstawioną w P5. W tej pracy rozważamy następujący ansatz [20] dla rozkładu f cząstki testowej (trójpęd $p \gg$ masa m), doświadczającej fluktuacji temperatury $\Delta T \sim (\Delta\beta)^{-1}$ względem wartości średniej β

$$f = e^{-\beta p(1+\Delta\beta)}. \tag{30}$$

Zakładając małe zaburzenie ($\Delta\beta \ll 1$), można rozwinąć rozkład cząstki testowej w przybliżeniu liniowym

$$\begin{aligned} f &\approx e^{-p\beta - p\beta\Delta\beta}\Big|_{\Delta\beta=0} + \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\left[e^{-p\beta-p\beta\Delta\beta}\right]\Big|_{\Delta\beta=0}\Delta\beta \\ &= e^{-p\beta} - p\beta e^{-p\beta}\Delta\beta \\ &= f^{(0)} - f^{(0)}p\beta\Delta\beta, \end{aligned} \tag{31}$$

gdzie $f^{(0)} = e^{-p\beta}$. Ewolucja rozkładu f jest badana przy użyciu Równania Transportu Boltzmanna (BTE) w przybliżeniu czasu relaksacji (RTA), przy założeniu braku sił zewnętrznych, gdzie $t_{\rm R}$ oznacza czas relaksacji

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{E}\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{f - f^{(0)}}{t_{\rm R}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[f^{(0)} - f^{(0)}p\beta\Delta\beta\right] + \frac{p^i}{E}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[f^{(0)} - f^{(0)}p\beta\Delta\beta\right] = -\frac{f - f^{(0)}}{t_{\rm R}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Jeśli założymy, że równowagowa funkcja rozkładu $f^{(0)}$ jest stacjonarna przez czas znacznie dłuższy niż czas obserwacji dopuszczalny w ramach BTE (który jest znacznie krótszy od czasu relaksacji $t_{\rm R}$, w którym rozkład zmienia się zauważalnie) oraz jednorodna, wówczas BTE dla rozkładu $f^{(0)}$ jest w przybliżeniu spełnione. W konsekwencji równanie (32) przyjmuje postać

$$-\frac{\partial\Delta\beta}{\partial t} - \frac{p^i}{E}\frac{\partial\Delta\beta}{\partial x^i} - \frac{\Delta\beta}{t_{\rm R}} = 0 \tag{33}$$

Wyrażamy $\Delta\beta$, które jest funkcją przestrzeni i czasu (przy założeniu izotropowej fluktuacji), w postaci jego transformaty Fouriera

$$\Delta\beta(\vec{r};t) = \int d^3k \Delta\beta_k(t) e^{i\vec{k}.\vec{r}} \quad (\Delta\beta_k(t) \equiv \Delta\beta(\vec{k};t)), \tag{34}$$

i otrzymujemy następujące równanie (w granicy bezmasowej $|\vec{p}| \approx E$)

$$\frac{\partial\Delta\beta_k(t)}{\partial t} = -\left[i\frac{|\vec{p}|}{E}k\mu + \frac{1}{t_{\rm R}}\right]\Delta\beta_k(t) \approx -\left[ik\mu + \frac{1}{t_{\rm R}}\right]\Delta\beta_k(t), \tag{35}$$

gdzie $\hat{k}.\hat{p} = \mu = \cos\theta$. Rozwiązanie równania (35), po uśrednieniu po kącie bryłowym Ω, przyjmuje następującą postać

$$\Delta\beta_{\rm av}(k;t) = \Delta\beta(k;t^0)e^{-\frac{t-t^0}{t_{\rm R}}}\frac{\sin k(t-t^0)}{k(t-t^0)}. \tag{36}$$

Powyższe wyrażenie pokazuje, że względna fluktuacja $\Delta\beta_{\text{rel}}(k;t) = \Delta\beta_{\text{av}}(k;t)/\Delta\beta(\vec{k};t^0)$ jest największa w obszarze małych długości falowych ($k \approx 0$). Jednocześnie fluktuacje zanikają wraz z upływem czasu.

Rozszerzenie powyższej analizy można przeprowadzić, uwzględniając radialnie zmienny profil temperatury w lepkim ośrodku powstającym w zderzeniach wysokoenergetycznych. W tym celu przyjmujemy następującą parametryzację fenomenologiczną (w zależności od parametrów T_0, $a(t)$, r_0)

$$T_M(r;t) = \frac{T_0(t)}{e^{a(t)\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}+1} \tag{37}$$

który przedstawia jakościowe radialne zachowanie profilu temperatury ($T_M = \beta_M^{-1}$) pokazanego w pracy [22]. Przekształcając równanie (37) do postaci wyrażonej przez β_M oraz definiując wartość średnią $\beta(t)$ dla określonego przekroju czasowego, fluktuacja $\Delta\beta(r;t)$ może zostać zdefiniowana jako

$$\Delta\beta(r;t) = \beta_M(r;t) - \beta(t) = \beta_0(t)e^{a\left(\frac{r}{r_0}-1\right)} + \delta\beta(t), \tag{38}$$

gdzie $\delta\beta(t) = \beta_0(t) - \beta(t)$. W przestrzeni Fouriera otrzymujemy (dla granicy układu w $r = R$ oraz $b \equiv a/r_0$)

$$\begin{aligned}\Delta\beta(k;t) &= \frac{\beta_0 e^{-a}}{2\pi^2 k}\int_0^R dr\, re^{br}\sin(kr)\\ &= \frac{\beta_0 e^{-a}}{2\pi^2 k}\left[\frac{e^{bR}\left\{\left(b^3R + bRk^2 - b^2 + k^2\right)\sin(kR) - \left(Rb^2k + Rk^3 - 2bk\right)\cos(kR)\right\} - 2bk}{\left(b^2+k^2\right)^2}\right] + \delta\beta(t)\delta(k).\end{aligned} \tag{39}$$

Powyższe równanie, ważne dla dowolnego czasu obserwacji, pokazuje, że mody o małych liczbach falowych fluktuacji β dominują w wyniku obecności delty Diraca w przestrzeni k. Po podstawieniu odpowiednich wartości parametrów widać również, że amplitudy fluktuacji ulegają istotnemu osłabieniu w czasie. Profil temperatury z równania (39), który generuje widmo fluktuacji, może być również wykorzystany do wyznaczenia zbioru wartości β oraz powiązania ich względnej wariancji z parametrem entropijnym q [15].

Zarówno równania (36) jak i (39) pokazują, że liniowa ewolucja zaburzeń prowadzi do istotnego zaniku ich amplitudy w czasie, a tego typu perturbacje nie zachowują swoich kształtów w czasie istnienia ośrodka QGP. Jednak linearyzacja jest poprawna jedynie w przypadku małych zaburzeń (w porównaniu do tła gęstości energii/cząstek). Na przykład perturbacje generowane przez ciężkie kwarki w QGP mogą mieć charakter nieliniowy, ponieważ ich masy są znacznie większe niż energia tła QGP. Takie nieliniowe zaburzenia, propagując w QGP, mają większą zdolność do zachowania kształtu w postaci fal solitonowych. Zachowanie kształtu może być jednak modyfikowane przez nieaddytywny charakter ośrodka QGP, ponieważ wykazuje on fluktuacje, efekty pamięci oraz korelacje długozasięgowe. W następnej sekcji omówimy ten temat przedstawiony w P6.

Propagacja nieliniowych fal przez gorący, idealny i nieaddytywny QGP w zerowym i niezerowym polu magnetycznym

Jak podkreśliliśmy w poprzedniej sekcji, nieliniowe fale mogą być generowane, gdy wysokoenergetyczne cząstki przechodzą przez QGP. Czasami fale te przeżywają przejście przez ośrodek i przyczyniają się do produkcji cząstek, a czasami ulegają zniszczeniu w ośrodku, co symuluje jego nieprzezroczystość. Jedne z najwcześniejszych badań fal nieliniowych w QGP dotyczą propagacji impulsów gęstości baryonowej, które wykazują solitoniczne rozwiązania równania Kortewega–de Vriesa (KdV) [24]. Inne prace przewidywały rozwiązania typu fal załamujących się, zależnie od równania stanu (EoS$^{\text{s}}$) [25]. Badania te zakładają statystykę Boltzmanna–Gibbsa, podczas gdy ośrodek QGP charakteryzuje się wewnętrznymi fluktuacjami, korelacjami oraz efektami pamięci. W związku z tym w pracy P6 zaadaptowano nieaddytywne uogólnienie równań stanu typu MIT bag. Tło nieaddytywne modyfikuje odpowiedź ośrodka na perturbacje oraz zmienia ich ewolucję. Aby zbadać efekt nieaddytywności, rozważamy najpierw płyn idealny, którego równanie ruchu dane jest przez równanie Eulera z warunkiem zachowania czteroprądu entropii. W jednym wymiarze przestrzennym układ ten prowadzi do dwóch równań dla czterech niewiadomych. Jednak układ zostaje domknięty przez dwa równania stanu. W niniejszej pracy zakładamy zerowy potencjał chemiczny.

Model matematyczny

Relatywistyczne równanie Eulera: Jednowymiarowe relatywistyczne równanie Eulera [23] dla pola prędkości $\vec{v} = v(x,t)\hat{x}$ w chwili t i położeniu x ma postać

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v^2-1}{\epsilon + P}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial t}\right), \tag{40}$$

gdzie $\epsilon \equiv \epsilon(x,t)$ oznacza gęstość energii, a $P \equiv P(x,t)$ jest ciśnieniem.

Rozważając czteroprąd entropii $s^\mu = su^\mu$, gdzie $u^\mu \equiv (\gamma, \gamma\vec{v})$ jest czteroprędkością, można wyprowadzić równanie ciągłości dla gęstości entropii s (szczegóły podano w [25]) w postaci

$$vs\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (1-v^2)\left(\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0, \tag{41}$$

gdzie zastosowano czynnik Lorentza w postaci $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

Nieaddytywne równania stanu modelu worka MIT: Zakładając idealny gaz kwarków i gluonów, równanie stanu modelu worka MIT przyjmuje postać (dla zanikającej netto gęstości barionowej)

$$\epsilon_{\text{bag}} = \mathcal{B} + \epsilon_b + 2\epsilon_f, \tag{42}$$
$$P_{\text{bag}} = -\mathcal{B} + P_b + 2P_f, \tag{43}$$

gdzie $\mathcal{B}$ jest stałą worka, reprezentującą ciśnienie próżni, natomiast indeks 'b' ('f') oznacza wkład bozonowy (fermionowy) do zmiennych termodynamicznych. Czynnik 2 stojący przed częścią fermionową uwzględnia cząstki oraz antycząstki.

W powyższych równaniach ϵ_b oraz P_b dane są przez równanie (28). Fermionowe zmienne termodynamiczne wyznaczamy do rzędu $\mathcal{O}(m^2T^2)$. Zakładamy, że plazma składa się z kwarków górnego i dolnego o masach rzędu 5–10 MeV, oraz sprawdziliśmy, że dla szerokiego zakresu parametrów q i T występujących w badaniach fenomenologicznych zderzeń wysokoenergetycznych, przybliżenie $\mathcal{O}(m^2T^2)$ działa bardzo dobrze, gdy masa cząstki wynosi około 10 MeV[6]. W związku z tym ϵ_f oraz P_f dla lekko masywnych fermionów dane są przez

$$\epsilon_f = \epsilon_{f,1}T^4 - \frac{gm^2T^2}{4\pi^2(q-1)q}\left[\Phi\left(-1,1,\frac{2}{q}-1\right) - \Phi\left(-1,1,\frac{1}{q}\right)\right] \equiv \epsilon_{f,1}T^4 + \epsilon_{f,2}m^2T^2$$
$$P_f = P_{f,1}T^4 - \frac{gm^2T^2}{4\pi^2(q-1)q}\left[\Phi\left(-1,1,\frac{2}{q}-1\right) - \Phi\left(-1,1,\frac{1}{q}\right)\right] \equiv P_{f,1}T^4 + P_{f,2}m^2T^2. \tag{44}$$

gdzie $\epsilon_{f,1}$ oraz $P_{f,1}$ dane są przez równanie (29). Wykorzystując równania (42)–(44), otrzymujemy równania stanu $P(\epsilon_{\text{bag}})$ oraz $s(\epsilon_{\text{bag}})$.

Ewolucja: Wykorzystując równania stanu, równania (40) oraz (41) przyjmują postać

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \mathcal{E}_1(1-v^2)\left(\frac{\partial \epsilon_{\text{bag}}}{\partial x} + v\frac{\partial \epsilon_{\text{bag}}}{\partial t}\right) = 0 \tag{45}$$
$$\mathcal{C}_1(1-v^2)\left(v\frac{\partial \epsilon_{\text{bag}}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{\text{bag}}}{\partial t}\right) + \mathcal{C}_2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0. \tag{46}$$

W terminach $\epsilon_{\text{bag},1} = \epsilon_{b,1} + 2\epsilon_{f,1}$, $P_{\text{bag},1} = P_{b,1} + 2P_{f,1}$, $\epsilon_{\text{bag},2} = 2\epsilon_{f,2}$ oraz $P_{\text{bag},2} = 2P_{f,2}$, wielkości $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ dane są przez

$$\mathcal{C}_1 = m^2\epsilon_{\text{bag},2} + 2T^2\epsilon_{\text{bag},1}; \quad \mathcal{C}_2 = \left(4T^4\epsilon_{\text{bag},1} + 2m^2T^2\epsilon_{\text{bag},2}\right)\left(m^2\epsilon_{\text{bag},2} + \frac{2}{3}\epsilon_{\text{bag},1}T^2\right) \tag{47}$$
$$\mathcal{E}_1 = \frac{\left(m^2\epsilon_{\text{bag},2} + \frac{2}{3}\epsilon_{\text{bag},1}T^2\right)}{\left(m^2\epsilon_{\text{bag},2} + 2T^2\epsilon_{\text{bag},1}\right)\left(\frac{4}{3}T^4\epsilon_{\text{bag},1} + 2m^2T^2\epsilon_{\text{bag},2}\right)}. \tag{48}$$

Badamy nieliniowe perturbacje wewnątrz QGP przy użyciu dobrze znanej teorii redukcyjnej perturbacji (RPT) [27]. Wyrażamy równania (45) oraz (46) za pomocą następujących bezwymiarowych zmiennych:

$$\hat{\epsilon} = \frac{\epsilon_{\text{bag}}}{\epsilon_0}, \ \hat{v} = \frac{v}{c_s}, \tag{49}$$

[6] Analizę dla dowolnie masywnych fermionów przeprowadziła Alexandra Nemtinova w swojej pracy magisterskiej [26]

gdzie ϵ_0 jest referencyjną gęstością energii, a c_s oznacza prędkość dźwięku. Zgodnie z teorią RPT wyrażamy $\hat{\epsilon}$ oraz $\hat{v}$ za pomocą małego parametru σ w postaci

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} &= 1 + \sigma\epsilon_1 + \sigma^2\epsilon_2 + \mathcal{O}(\sigma^3)\\ \hat{v} &= \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \mathcal{O}(\sigma^3).\end{aligned} \tag{50}$$

Zmienia się również zmienne niezależne z $(x,\, t)$ na $(\xi,\, \tau)$, które są powiązane zależnością

$$\xi = \sigma^{\frac{1}{2}}\frac{(x - c_s t)}{R},\ \tau = \sigma^{\frac{3}{2}}\frac{c_s t}{R}, \tag{51}$$

gdzie R jest charakterystyczną skalą długości rozważanego problemu.

W najniższym rzędzie, *tzn.* dla $\mathcal{O}(\sigma)$ równań (45) oraz (46), otrzymujemy następujące zależności oraz prędkość dźwięku c_s

$$c_s^2\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \epsilon_0\mathcal{E}_1\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \xi},\ \ \mathcal{C}_2\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \epsilon_0\mathcal{C}_1\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \xi} \Rightarrow c_s^2 = \frac{\mathcal{C}_2\mathcal{E}_1}{\mathcal{C}_1}. \tag{52}$$

W kolejnym rzędzie, tj. dla $\mathcal{O}(\sigma^2)$, otrzymujemy nieliniowe równanie ewolucji dla perturbacji gęstości energii ϵ_1. Korzystając z zależności pomiędzy v_1 i ϵ_1 wynikających z równania (52), ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \tau} + \frac{2\epsilon_0\epsilon_{\text{bag},1}\epsilon_1}{3m^4\epsilon_{\text{bag},2}^2 + 8m^2T^2\epsilon_{\text{bag},1}\epsilon_{\text{bag},2} + 4T^4\epsilon_{\text{bag},1}^2}\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \xi} = 0. \tag{53}$$

W układzie współrzędnych x–t poprzednie równanie jest dane przez

$$\frac{\partial \hat{\epsilon}_1}{\partial t} + c_s\frac{\partial \hat{\epsilon}_1}{\partial x} + \frac{2c_s\epsilon_0\epsilon_{\text{bag},1}\hat{\epsilon}_1}{3m^4\epsilon_{\text{bag},2}^2 + 8m^2T^2\epsilon_{\text{bag},1}\epsilon_{\text{bag},2} + 4T^4\epsilon_{\text{bag},1}^2}\frac{\partial \hat{\epsilon}_1}{\partial x} = 0, \tag{54}$$

gdzie $\hat{\epsilon}_1 = \sigma\epsilon_1$ jest pierwszym rzędem perturbacji w przeskalowanej gęstości energii. Postać matematyczna otrzymanego równania jest podobna do równania Burgersa dla ośrodka bezlepkościowego, z rozwiązaniem typu fali załamującej się, które ulega dyspersji w przeciwieństwie do fal solitonowych. Zakładając początkowy $(t = 0)$ rozkład perturbacji energii w postaci

$$\hat{\epsilon}_1(x) = A\ \text{Sech}^2\left(\frac{x}{B}\right), \tag{55}$$

rozwiązanie równania (54) może zostać zapisane w postaci

$$\hat{\epsilon}_1(\chi) = A\ \text{Sech}^2\left(\frac{\chi}{B}\right), \tag{56}$$

gdzie

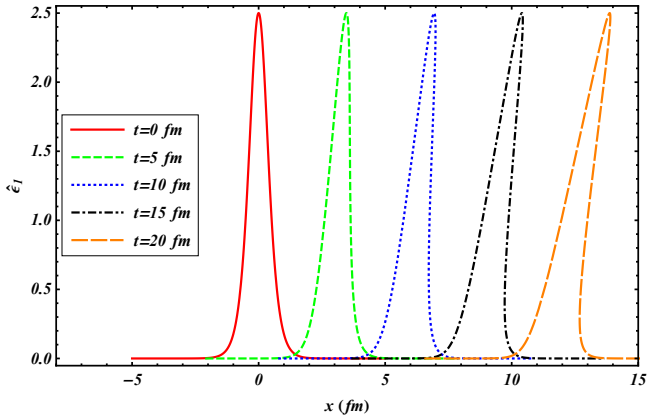
$$\chi = x - c_s(1 + B_c\hat{\epsilon}_1(\chi))t;\ \text{and}\ B_c = \frac{2\epsilon_0\epsilon_{\text{bag},1}}{3m^4\epsilon_{\text{bag},2}^2 + 8m^2T_{\text{con}}^2\epsilon_{\text{bag},1}\epsilon_{\text{bag},2} + 4T_{\text{con}}^4\epsilon_{\text{bag},1}^2}. \tag{57}$$

Przy warunku początkowym z równania (55), rozwiązanie równania (54) zaczyna wykazywać załamanie (*tzn.* profil perturbacji staje się wielowartościowy wskutek nieliniowego zaostrzania) przy $t \sim 10$ fm dla zadanych wartości A, B, q oraz T, jak pokazano na rysunku (3). Oznacza to, że dla pewnych parametrów rozwiązanie typu fali załamującej się może imitować stabilność w czasie życia QGP (~ 10 fm).

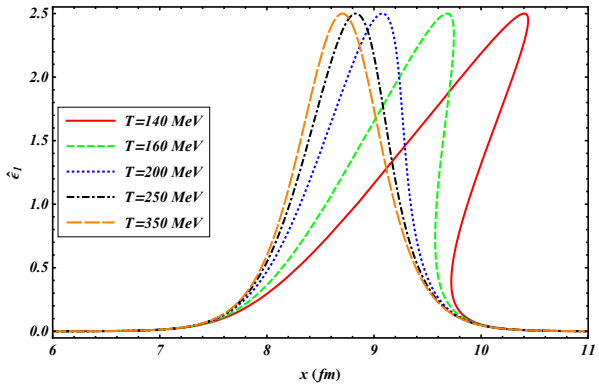
Na rysunkach (4) oraz (5) przedstawiamy zmienność perturbacji pierwszego rzędu w zależności od temperatury T oraz parametru entropijnego q. Obserwujemy, że wraz ze wzrostem q oraz T fale zbliżają się do stanu stabilizacji. Dla większych wartości T i q współczynnik B_c maleje, co osłabia siłę nieliniowego zaostrzania fali. Zauważamy również, że zwiększenie szerokości (amplitudy) fali prowadzi odpowiednio do wzrostu (spadku) jej stabilności. W naszych analizach przyjmujemy $\epsilon_0 = 0.16$ GeV fm^{-3}.

Wpływ pola magnetycznego na stabilność fal nieliniowych w złożonym ośrodku

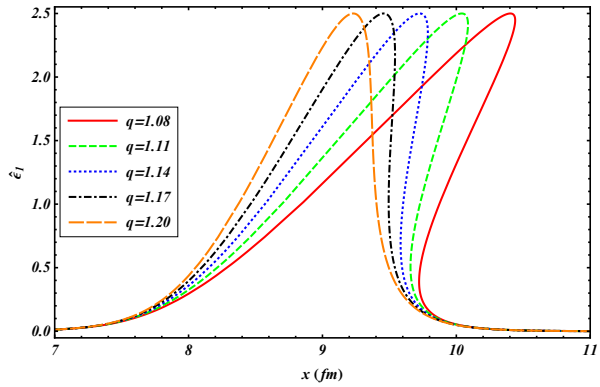
W pracy P7 badamy, w jaki sposób pole magnetyczne może wpływać na stabilność fal nieliniowych wewnątrz złożonego ośrodka, takiego jak QGP. Niecentralne zderzenia wysokoenergetyczne generują przejściowe pole magnetyczne rzędu $eB \sim (1 - 10)\, m_\pi^2$, dlatego realistyczne jest analizowanie stabilności fal nieliniowych w obecności pola magnetycznego. Rozważamy idealne równania magnetohydrodynamiczne [28] oraz stosujemy



Rysunek 3: Rozwiązania równania (54) w różnych chwilach czasu (rysunek pochodzi z P6). $A = 2.5$, $B = 0.5$ fm, $q = 1.08$ oraz $T = 140$ MeV.



Rysunek 4: Rozwiązania przy $t = 15$ fm dla różnych wartości temperatury Tsallisa (rysunek pochodzi z P6). $A = 2.5$, $B = 0.5$ fm oraz $q = 1.08$.



Rysunek 5: Rozwiązania przy $t = 15$ fm dla różnych wartości parametru Tsallisa (rysunek pochodzi z P6). $A = 2.5$, $B = 0.5$ fm oraz $T = 140$ MeV.

technikę redukcyjnej perturbacji opisaną w poprzedniej sekcji. Równania stanu wyprowadzamy również przy użyciu techniki Mellina–Barnesa opisanej w P3 oraz P4. Jednak ze względu na obecność pola magnetycznego wartości energii ulegają kwantyzacji, a całkowanie po trójpędzie zostaje odpowiednio zmodyfikowane. Na przykład ciśnienie w obszarze górnym (zgodnie z opisem w podsekcji 4.3.3) dane jest przez

$$P_f^{(\mathrm{up})} = \sum_{s=1}^{s_0} (-1)^{s+1} gm|q_f eB| \left[\frac{m\Gamma\left(\frac{qs}{2\delta q} - 1\right)\left(\frac{T}{\delta qm}\right)^{\frac{qs}{\delta q}} {}_2F_1\left(\frac{qs}{2\delta q}, \frac{qs}{2\delta q} - 1; \frac{1}{2}; \frac{T^2}{m^2\delta q^2}\right)}{8\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{qs}{2\delta q} + \frac{1}{2}\right)} \right.$$
$$\left. - \frac{T\Gamma\left(\frac{qs}{2\delta q} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{T}{\delta qm}\right)^{\frac{qs}{\delta q}} {}_2F_1\left(\frac{qs}{2\delta q} - \frac{1}{2}, \frac{qs}{2\delta q} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{T^2}{m^2\delta q^2}\right)}{4\pi^{3/2}\delta q\Gamma\left(\frac{qs}{2\delta q}\right)} \right], \tag{58}$$

gdzie $\delta q = q - 1$, a $q_f e$ oznacza ładunek (lekko masywnych) kwarków. Ciśnienie w obszarze dolnym można otrzymać poprzez kontynuację analityczną, zgodnie z opisem przedstawionym w P7. Pozostałe zmienne termodynamiczne oraz prędkość dźwięku mogą zostać obliczone z relacji termodynamicznych opisanych wcześniej.

Zaobserwowano, że pole magnetyczne prowadzi do stabilizacji fal. Wraz ze wzrostem natężenia pola magnetycznego maleje nieliniowy człon w równaniu ruchu, a nieliniowe zaostrzanie prowadzące do załamania fali ulega osłabieniu.

4.3.5 Odpowiedź ośrodka: z perspektywy teorii kinetycznej

W poprzednich sekcjach badaliśmy nieliniowe perturbacje w QGP oraz ich propagację w ramach relatywistycznej hydrodynamiki. W zderzeniach wysokoenergetycznych jednym ze źródeł takich perturbacji jest przejście

wysokoenergetycznych cząstek przez ośrodek. Oddziaływanie tych cząstek z QGP prowadzi do wymiany pędu oraz modyfikacji ich rozkładu, co znajduje odzwierciedlenie w obserwablach eksperymentalnych, takich jak współczynnik supresji jądrowej.

W tej sekcji omawiamy prace przedstawione w P8–P11, które wykorzystują równanie transportu Boltzmanna lub równanie Plastino–Plastino (nieaddytywne uogólnienie równania Fokkera–Plancka). Podczas gdy opis hydrodynamiczny stanowi makroskopową manifestację odpowiedzi ośrodka, podejście transportowe umożliwia analizę mikroskopowego opisu tej odpowiedzi. Dochodzenie do mikroskopowego opisu w ramach oddziaływań QCD realizowano stopniowo w pracach P8–P11.

W pracy P8 badamy wpływ nieaddytywnych rozkładów początkowych na współczynnik supresji jądrowej $R_{\rm AA}$ przy użyciu równania transportu Boltzmanna (BTE) w przybliżeniu czasu relaksacji (RTA). Jednak w tym fenomenologicznym podejściu efekt nieaddytywności uwzględniany jest jedynie poprzez same rozkłady. W pracach P9 oraz P10 rozważano nieaddytywne uogólnienie BTE w przybliżeniu czasu relaksacji, prowadzące do stanu stacjonarnego typu potęgowego. Ostatecznie w P11, a także w P10, zastosowano nieaddytywne równanie Plastino–Plastino, wyprowadzone z nieaddytywnego BTE i kodujące mikroskopowe oddziaływanie pomiędzy sondą a ośrodkiem.

Współczynnik supresji jądrowej: BTE w RTA z nieaddytywnym rozkładem początkowym

Współczynnik supresji jądrowej jest obserwablą wskazującą na formowanie się ośrodka w zderzeniach wysokoenergetycznych. Supresję jądrową cząstki-sondy można ilościowo określić na podstawie stopnia zmiany jej rozkładu w przestrzeni fazowej po przejściu przez ośrodek QGP. Zatem, jeżeli $f_{\rm fin}$ oznacza rozkład końcowy, a $f_{\rm in}$ rozkład początkowy, teoretyczna miara $R_{\rm AA}$ wynika ze stosunku $f_{\rm fin}/f_{\rm in}$. Eksperymentalnie $R_{\rm AA}$ definiuje się jako

$$R_{\rm AA} = \frac{\left(d^2N/dp_{\rm T}dy\right)^{\rm A+A}}{\langle N_{\rm coll}\rangle \times \left(d^2N/dp_{\rm T}dy\right)^{\rm p+p}}, \tag{59}$$

gdzie $\langle N_{\rm coll}\rangle$ oznacza średnią liczbę binarnych zderzeń nukleon–nukleon (p+p), gdy jądro ‘A’ zderza się z innym jądrem. Wielkość $d^2N/dp_{\rm T}dy$ oznacza różniczkowaną wydajność w zakresie pędu poprzecznego oraz pospieszności od $p_{\rm T}$ do $p_{\rm T}+dp_{\rm T}$ oraz od y do $y+dy$.

W pracy P8 zaproponowano model fenomenologiczny do badania wpływu nieaddytywnych rozkładów na $R_{\rm AA}$. Ewolucję rozkładu cząstek można analizować przy użyciu równania transportu Boltzmanna w postaci

$$\frac{df(x,p,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_x f + \vec{F}.\vec{\nabla}_p f = C[f], \tag{60}$$

gdzie $f(x,p,t)$ jest rozkładem w przestrzeni fazowej, a $\vec{v}$ oznacza prędkość cząstki-sondy. $\vec{F}$ reprezentuje siłę zewnętrzną, natomiast $C[f]$ jest członem zderzeniowym kodującym oddziaływanie cząstek-sond z ośrodkiem. Jeżeli w chwili $t=0$ wszystkie siły zewnętrzne zostają wyłączone, a wszystkie gradienty zanikają, równanie BTE przyjmuje następującą postać w przybliżeniu czasu relaksacji dla członu zderzeniowego,

$$\frac{df(x,p,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f-f_{\rm eq}}{\tau}, \tag{61}$$

gdzie $f_{\rm eq}$ jest rozkładem równowagowym charakteryzowanym przez temperaturę $T_{\rm eq}$, a τ oznacza czas relaksacji. Rozwiązanie powyższego równania przy warunkach brzegowych $f(t=0)=f_{\rm in}$ oraz $f(t_{\rm f})=f_{\rm fin}$, gdzie $t_{\rm f}$ jest czasem zamrożenia, prowadzi do

$$f_{\rm fin} = f_{\rm eq} + (f_{\rm in}-f_{\rm eq})e^{-\frac{t_{\rm f}}{\tau}}. \tag{62}$$

W związku z tym współczynnik modyfikacji jądrowej może zostać zapisany jako

$$R_{AA} = \frac{f_{\rm fin}}{f_{\rm in}} = \frac{f_{\rm eq}}{f_{\rm in}} + \left(1-\frac{f_{\rm eq}}{f_{\rm in}}\right)e^{-\frac{t_f}{\tau}}. \tag{63}$$

Parametryzując początkowy rozkład typu potęgowego za pomocą nieaddytywnej funkcji (równanie (10)) oraz rozkład równowagowy jego wykładniczym odpowiednikiem Boltzmanna–Gibbsa, współczynnik supresji jądrowej może zostać zapisany jako

$$R_{AA} = \frac{e^{-\frac{m_{\rm T}}{T_{\rm eq}}}}{(1+(q-1)\frac{m_{\rm T}}{T})^{-\frac{q}{q-1}}} + \left[1-\frac{e^{-\frac{m_{\rm T}}{T_{\rm eq}}}}{(1+(q-1)\frac{m_{\rm T}}{T})^{-\frac{q}{q-1}}}\right]e^{-\frac{t_{\rm f}}{\tau}}. \tag{64}$$

Powyższe równanie zostało wykorzystane w P8 do badania widma hadronów produkowanych w zderzeniach wysokoenergetycznych. Dla lżejszych hadronów wzór nie opisuje dobrze niskopędowej części widma. Ponadto, wzrost $R_{\rm AA}$ w obszarze dużych pędów nie został odtworzony.

Równanie (64) wskazuje, że wraz ze wzrostem parametru entropijnego q wartość $R_{\rm AA}$ maleje. Dla większych q rozkład początkowy staje się bardziej stromy, a ośrodek musi silniej supresować cząstki, aby osiągnąć stan równowagi, co skutkuje spadkiem $R_{\rm AA}$. W ramach tego podejścia możliwe jest również oszacowanie stosunku czasu relaksacji do czasu korelacji nienasyconego układu wielocząstkowego [29].

Pomimo interesujących wniosków i zastosowań wynikających z powyższego podejścia, klasyczne równanie transportu Boltzmanna z wykładniczym stanem stacjonarnym nie jest w stanie opisać ruchu typu Lévy walk pionów w ośrodku QGP [7] ani anomalnej dyfuzji. Konieczność uogólnienia BTE znajduje również potwierdzenie w wynikach pracy [6], które pokazują, że oddziaływania QCD ciężkich kwarków z QGP prowadzą do powstania stanu stacjonarnego typu potęgowego, opisywanego przez nieaddytywny rozkład dany w (1).

Nieaddytywne BTE (NABTE): Wyniki i dyskusje z poprzedniej sekcji wskazują, że potrzebne jest uogólnione równanie transportu dopuszczające potęgowy stan stacjonarny. Takie podejście, oparte na nieaddytywnej generalizacji równania Boltzmanna, zostało opracowane w pracach [14, 30, 31]. Pozostała część autoreferata będzie poświęcona badaniu nieaddytywnego BTE (NABTE) w przybliżeniu RTA (P9 i P10) oraz przybliżeniu kinetycznym Landaua prowadzącym do nieaddytywnego równania Fokkera–Plancka / równania Plastino–Plastino (P10 i P11). Dla nierównowagowego rozkładu f opisującego cząstkę o czteropędzie p_μ, nieaddytywne równanie Boltzmanna ma postać [14, 30, 31]

$$p^\mu \partial_\mu f^q = \mathcal{C}_q[f], \tag{65}$$

gdzie $\mathcal{C}_q$ jest zmodyfikowanym członem zderzeniowym wynikającym z uogólnionej hipotezy chaosu molekularnego, a wykładnik potęgowy q po lewej stronie równania jest kluczowy dla spełnienia lokalnych praw zachowania [14]. Uogólniona hipoteza chaosu molekularnego (tzw. uogólniony 'stosszahlansatz') zapewnia, że rozkład cząstek nadchodzących oraz rozkład ośrodka nie są niezależne i w związku z tym nie mogą być faktoryzowane. Zgodnie z poprzednimi pracami (np. [14]) dwu-cząstkowy rozkład uogólniający stosszahlansatz jest dany przez iloczyn q:

$$h_q\{f,g\} = \left[f^{1-q} + g^{1-q} - 1\right]^{\frac{1}{1-q}}.$$

Dla zderzeń binarnych cząstek o czteropędach $p \equiv (E, \vec{p})$ (o rozkładzie pędu f) oraz $q_m \equiv (\mathcal{E}, \vec{q})$ (o rozkładzie pędu g), które po oddziaływaniu przechodzą w stany $p' \equiv (E', \vec{p'})$ oraz $q' \equiv (\mathcal{E}', \vec{q'})$, NABTE można zapisać jako

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu f^q \;=\; & \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}} \frac{d^3\vec{q'}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}'} \frac{d^3\vec{p'}}{(2\pi)^3 2E'} |\overline{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + q_m - p' - q') \\ & \left[h_q\{f(\vec{p'}), g(\vec{q'})\} - h_q\{f(\vec{p}), g(\vec{q})\}\right]. \end{aligned} \tag{66}$$

Jeżeli rozważamy ciężki kwark przechodzący przez QGP, to M oznacza amplitudę oddziaływania kwark–kwark oraz kwark–gluon w QGP.

NABTE w RTA oraz supresja jądrowa

Jeżeli w chwili $t = 0$ wszystkie siły zewnętrzne zostają wyłączone, a gradienty zanikają, nieaddytywne równanie transportu Boltzmanna dla rozkładu f w przybliżeniu czasu relaksacji ma postać

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} \;=\; -\frac{(f - f_{\rm eq})}{\tau}, \tag{67}$$

co po scałkowaniu obu stron przyjmuje postać

$$\frac{f^{q-1}}{q-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1)_s (1-q)_s}{s!(2-q)_s} \left(\frac{f_{\rm eq}}{f}\right)^s \;=\; \mathcal{K} - \theta, \tag{68}$$

gdzie $\theta = t/(q\tau)$, a symbol $(\cdot)_s$ oznacza rosnący symbol Pochhammera (Pochhammer rising symbol) dany przez [32]

$$(a)_s = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ a(a+1).....(a+s-1) & \forall s > 0. \end{cases} \tag{69}$$

Nieskończony szereg w równaniu (68) jest w rzeczywistości funkcją hipergeometryczną ${}_2F_1$ [17]. Stała całkowania dana jest przez

$$\mathcal{K} = \frac{f_{\rm in}^{q-1}}{q-1}\,{}_2F_1\left(1, 1-q; 2-q; \frac{f_{\rm eq}}{f_{\rm in}}\right). \tag{70}$$

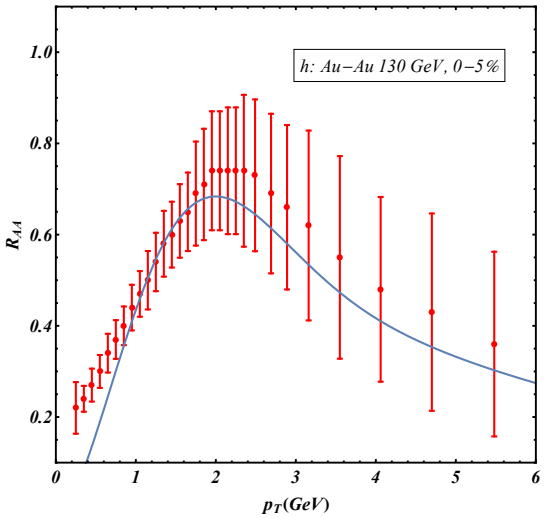
Po wyznaczeniu rozwiązania zerowego rzędu (*tzn.* dla $s = 0$) z równania (68), w pracy P10 zaproponowano perturbacyjny schemat rozwiązywania równania (67), umożliwiający wyznaczenie rozwiązań pierwszego (uwzględniając tylko wyraz $s = 1$) oraz wyższych rzędów. Rozwiązania te można przedstawić w postaci

$$f_i = f_{i-1} + \epsilon_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, ..., \tag{71}$$

gdzie $\epsilon_i^{\rm s}$ są obliczane z następującego wyrażenia,

$$\epsilon_i = \frac{f_{i-1}}{\sum_{r=0}^{i} f_{\rm eq}^r f_{i-1}^{i-r}} \left(f_{i-1}^{i+1-q}(\mathcal{K} - \theta) + \sum_{r=0}^{i} \frac{f_{\rm eq}^r f_{i-1}^{i-r}}{r+1-q} \right). \tag{72}$$

Korzystając z rozwiązania pierwszego rzędu, eksperymentalnie obserwowany współczynnik supresji jądrowej dla wszystkich naładowanych hadronów w centralnych (0–5%) zderzeniach Au–Au przy $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV został przedstawiony na rys. (6) zaadaptowanym z P9. Warto podkreślić, że model teoretyczny odtwarza obecnie trend obserwowany w niskopędowej części widma, w przeciwieństwie do poprzedniego podejścia.



Rysunek 6: $R_{\rm AA}$ wszystkich naładowanych hadronów (linia ciągła pochodzi z teorii). $q = 1.024 \pm 0.011$, $T = 0.187 \pm 0.050$ GeV, $t/\tau = 1.183 \pm 0.0104$, $\chi^2/{\rm NDF} = 19.09/27$ (zaadaptowane z P10).

Rozwiązanie równania (67) zostało również wykorzystane w P9 do opisu podłużnej supresji jądrowej zdefiniowanej przez

$$R_{dN/dy} = \frac{(dN/dy)^{\rm A+A}}{\langle N_{\rm coll}\rangle \times (dN/dy)^{\rm p+p}}, \tag{73}$$

gdzie dN/dy jest rozkładem w szybkości, a $\langle N_{\rm coll}\rangle$ oznacza średnią liczbę binarnych zderzeń nukleon–nukleon podczas zderzenia dwóch ciężkich jonów (w tym przypadku Pb). Obserwabla ta różni się od powszechnie omawianego $R_{\rm AA}$ i dostarcza informacji o zjawiskach podłużnych.

Model teoretyczny oparty na nieaddytywnym BTE w przybliżeniu czasu relaksacji (RTA) może zostać wykorzystany do badania $R_{dN/dy}$ w następujący sposób. Rozwiązanie zerowego rzędu równania (67) dane jest przez

$$f_0 = \left[(q-1)\,(\mathcal{K} - \theta)\right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{74}$$

Rozkład f_0 jest powiązany z Lorentzowsko niezmienniczym widmem w następujący sposób,

$$E\frac{dN}{d^3p} = \frac{gVE}{(2\pi)^3} f_0. \tag{75}$$

Parametryzując E oraz p_z za pomocą zmiennych y i $m_{\rm T}$, można otrzymać widmo pędu poprzecznego w postaci

$$\frac{d^2N}{dp_{\rm T}dy} = \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T}\, m_{\rm T} \cosh y\, f_0 \Rightarrow \frac{dN}{dy} = \int \frac{gV}{(2\pi)^2} p_{\rm T}\, m_{\rm T} \cosh y\, f_0\, dp_{\rm T} \tag{76}$$

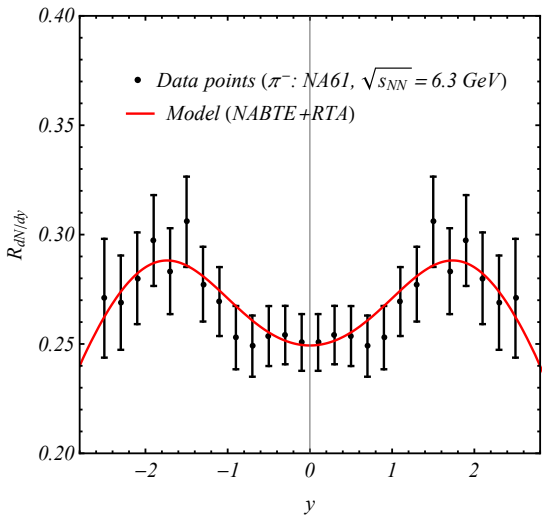
Wybierając rozkład początkowy oraz rozkład równowagowy, reprezentowane na przykład przez następujące funkcje,

$$f_{\rm in} = \left(1 + (q_{\rm in} - 1)\frac{E - \mu_{\rm in}}{T_{\rm in}}\right)^{-\frac{q_{\rm in}}{q_{\rm in}-1}}; \quad f_{\rm eq} = \left(1 + (q-1)\frac{E-\mu}{T}\right)^{-\frac{q}{q-1}}, \tag{77}$$

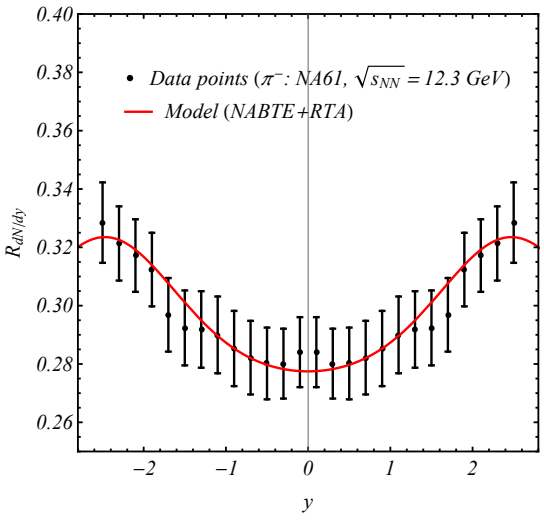
rozwiązanie f_0 w równaniu (74) może zostać wyznaczone. W związku z tym stosunek dN/dy może zostać zapisany jako

$$\frac{\int p_{\rm T}\, m_{\rm T} \cosh y\, f_0\, dp_{\rm T}}{\int p_{\rm T}\, m_{\rm T} \cosh y\, f_{\rm in}\, dp_{\rm T}}. \tag{78}$$

Porównujemy powyższy stosunek z eksperymentalnie obserwowanym $R_{dN/dy}$ [33–35] dla pionów na rysunkach (7) oraz (8). Wartości parametrów podane w podpisach tych rysunków wskazują, że układ rozpoczyna ewolucję z początkową wartością $q > 1$, a następnie relaksuje do niższej, lecz wciąż różnej od jedynki wartości q. Oznacza to, że układ pionów relaksujący w ośrodku nie dąży do granicy Boltzmanna-Gibbsa $q \to 1$. W związku z tym jego stan stacjonarny opisany jest rozkładem potęgowym. Obserwacja ta może być powiązana z niedawnymi symulacjami wskazującymi, że piony wykonują w układach tworzonych w zderzeniach jonów ciężkich ruchy typu Lévy walk [7]. Ruchy Lévy charakteryzują się rozkładami o ciężkich ogonach, co wskazuje na anomalną dyfuzję w ośrodku prowadzącą do stanu stacjonarnego typu potęgowego [14]. Oznacza to również, że nasze założenie nieaddytywnego równania transportu Boltzmanna, posiadającego stan stacjonarny typu potęgowego, może być uzasadnione. Wartości parametru t/τ, będącego stosunkiem czasu zamrożenia do czasu relaksacji, zmieniają się wokół 1, co wskazuje na możliwość, że piony produkowane we wczesnych fazach zderzenia mogą relaksować do stanu stacjonarnego.



Rysunek 7: Porównanie stosunku dN/dy w zderzeniach Pb-Pb i p-p ($\sqrt{s_{NN}} = 6.3$ GeV) dla cząstek π^- ($m = 0.139$ GeV) z równaniem (78) dla następujących wartości parametrów: $q_{\rm in} = 1.04$, $q = 1.025$, $T_{\rm in} = 0.08$ GeV, $T = 0.051$ GeV, $t/\tau = 1.06$, $\mu_{\rm in} = 0.12$ GeV, $\mu = 0.092$ GeV.



Rysunek 8: Comparison of the ratio of dN/dy in Pb-Pb and p-p collisions ($\sqrt{s_{NN}} = 12.3$ GeV) for the π^- particles (m=0.139 GeV) with Eq. (78) for the following parameter values: $q_{\rm in}$=1.05, q=1.01, $T_{\rm in}$=0.108 GeV, T= 0.08 GeV, t/τ= 1.04, $\mu_{\rm in}$= 0.18 GeV, μ=0.09 GeV.

NABTE, współczynniki transportowe QCD oraz supresja jądrowa

Przybliżenie czasu relaksacji stanowi użyteczne pierwsze przybliżenie zarówno klasycznego, jak i nieaddytywnego równania transportu Boltzmanna. Jednakże założenie to może być poprawne jedynie w ograniczonych scenariuszach. W związku z tym rozważamy kinetyczne przybliżenie Landaua równania BTE, które prowadzi odpowiednio do równania Fokkera–Plancka (dla BTE) lub równania Plastino–Plastino (dla NABTE). W niniejszej sekcji opisujemy transport ciężkich kwarków przez QGP przy użyciu równania Plastino–Plastino, które posiada stacjonarny stan typu potęgowego i opisuje anomalną dyfuzję. W odróżnieniu od poprzednich rozważań, sekcja ta dostarcza mikroskopowego opisu transportu ciężkich kwarków w uogólnionym ujęciu, w którym dominują fluktuacje oraz korelacje długozasięgowe. W przypadku braku siły zewnętrznej możemy zapisać równanie (66) w postaci

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} f^q = \frac{1}{2E}\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}} \frac{d^3\vec{q'}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}'} \frac{d^3\vec{p'}}{(2\pi)^3 2E'} |\overline{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + q_m - p' - q') \left[h_q\{f(\vec{p'}), g(\vec{q'})\} - h_q\{f(\vec{p}), g(\vec{q})\}\right]. \tag{79}$$

Zakładamy, że skala przestrzennych zmian w kierunku podłużnym jest wystarczająco duża, a ruch początkowy jest jednowymiarowy wzdłuż kierunku x. Następnie, przyjmując założenie Bjorkena o podłużnej niezmienniczości wzmocnienia Lorentza w centralnym obszarze szybkoci oraz przybliżenie kinetyczne Landaua P9, można otrzymać równanie Plastino–Plastino (PP) w następującej postaci

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{p_x t} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\left(A_i^{\rm PP} f\right) + \frac{\partial}{\partial p_i \partial p_j}\left(B_{ij}^{\rm PP} f^{2-q}\right) \qquad (i,j = 1,2,3). \tag{80}$$

$B_{ij}^{\rm PP}$ oraz $A_i^{\rm PP}$, współczynniki dyfuzji i dryfu Plastino–Plastino, dane są przez

$$B_{ij}^{\rm PP} = \frac{f^{q-1}}{2}\left[\frac{1}{2Eq}\int \frac{d^3\vec{Q}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}} \frac{d^3\vec{Q'}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}'} \frac{d^3\vec{P'}}{(2\pi)^3 2E'} |\overline{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + q_m - p^{'} - q^{'}) f^{1-q} S_{\vec{p},\vec{q}} k_i k_j\right],$$
$$\equiv \frac{f^{q-1}}{2}\langle\langle k_i k_j\rangle\rangle^{PP} \tag{81a}$$

$$A_i^{\rm PP} = \frac{1}{2Eq}\int \frac{d^3\vec{Q}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}} \frac{d^3\vec{Q'}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}'} \frac{d^3\vec{P'}}{(2\pi)^3 2E'} |\overline{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + q_m - p^{'} - q^{'}) f^{1-q} S_{\vec{p},\vec{q}} k_i \equiv \langle\langle k_i\rangle\rangle^{PP}, \tag{81b}$$

gdzie trójwymiarowy przekaz pędu wynosi $k_i \equiv (p - p')_i$ oraz czynnik $S_{\vec{p},\vec{q}}$

$$S_{\vec{p},\vec{q}} = \left[1 + \frac{\left(1 + \delta q_b \frac{|\vec{q}|}{T_b}\right)^{\frac{\delta q}{\delta q_b}}}{\left(1 + \delta q_h \frac{E}{T}\right)^{\frac{\delta q}{\delta q_h}}} - \frac{1}{\left(1 + \delta q_h \frac{E}{T}\right)^{\frac{\delta q}{\delta q_h}}}\right]^{-\frac{1}{\delta q}}, \tag{82}$$

opisuje współoddziaływanie (charakteryzowane przez $\delta q \equiv q - 1$) pomiędzy rozkładem wchodzącego ciężkiego kwarku (temperatura T, parametr entropijny $\delta q_h \equiv q_h - 1$) oraz rozkładem ośrodka (temperatura T_b, parametr entropijny $\delta q_b \equiv q_b - 1$). Oba rozkłady są parametryzowane funkcją analogiczną do równania (1), a we wszystkich obliczeniach w pracy przyjmujemy $q_h = q_b = 1.10$, $q = 1.002$, $T_h = 0.4$ GeV oraz $T_b = 0.2$ GeV.

Czynnik $S_{\vec{p},\vec{q}}$ pojawia się przy uogólnieniu hipotezy chaosu molekularnego w członie zderzeniowym. Przechodzi on w wykładniczy rozkład ośrodka (a tym samym odtwarza chaos molekularny), gdy parametry q, q_h oraz q_b dążą do 1.

Różróżniczkowana strata energii: Korzystając z notacji użytej w równaniu (81a), różróżniczkowana strata energii ciężkich kwarków w ośrodku opisywanym przez statystykę nieaddytywną może zostać zapisana jako

$$-\frac{dE}{dr} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{E^2 - EE'}{p} \right\rangle\!\!\right\rangle^{PP} = \frac{p_i A_i^{\rm PP} + f^{1-q} B_{00}^{\rm PP} - f^{1-q} B_{ii}^{\rm PP}}{p}, \tag{83}$$

gdzie $2B_{00}^{\rm PP} \equiv f^{q-1}\langle\langle(E-E')^2\rangle\rangle^{PP}$, powtarzające się indeksy są sumowane, a $p \equiv |\vec{p}|$. Równanie (83) stanowi uogólnienie równania otrzymanego w pracy [6].

Parametr jet-quenching: Wyrażając tensor dyfuzji $B_{ij}^{\rm PP}$ w postaci współczynników dyfuzji podłużnej (L) oraz poprzecznej (T) w następujący sposób

$$B_{ij}^{\rm PP} = \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}\right) B_{\rm T}^{\rm PP}(p^2) + \frac{p_i p_j}{P^2} B_{\rm L}^{\rm PP}(p^2), \tag{84}$$

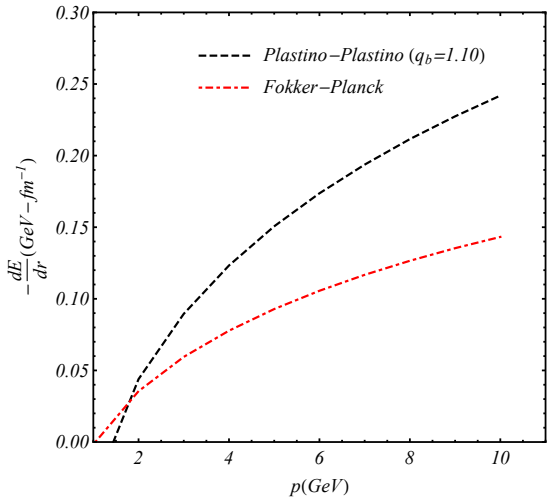
możemy zapisać $B_{\rm T}$ w postaci zależnej od poprzecznego przekazu pędu $k_{\rm T}$ w następujący sposób

$$B_{\rm T}^{\rm PP} = \frac{f^{q-1}}{4}\left\langle\left\langle k_{\rm T}^2\right\rangle\right\rangle^{PP}, \tag{85}$$

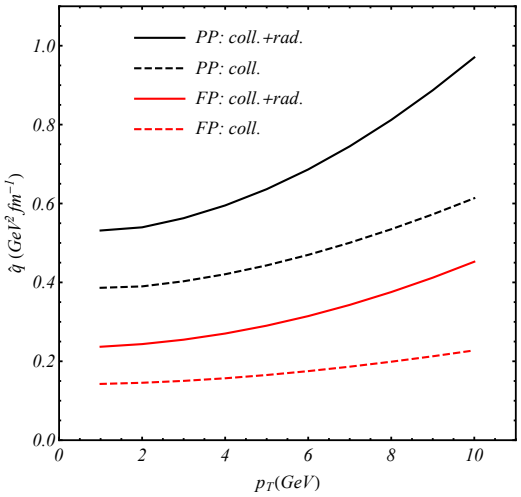
parametr jet-quenching $\hat{q}$ może zostać zapisany jako [36]

$$\hat{q}^{\rm PP} = \frac{\langle\langle k_{\rm T}^2\rangle\rangle^{\rm PP}}{v_{\rm L}} = \frac{E}{p_{\rm L}}\langle\langle k_{\rm T}^2\rangle\rangle^{\rm PP} = 4f^{1-q}\frac{E}{p_{\rm L}}B_{\rm T}^{\rm PP}. \tag{86}$$

Obie te wielko'sci zostały przedstawione na rys. (9) oraz (10).



Rysunek 9: Porównanie strat energii kwarków powabnych ($m = 1.5$ GeV) zgodnie z dynamiką równania Fokkera-Plancka oraz Plastino-Plastino w plazmie kwarkowo-gluonowej o temperaturze $T_b = 0.2$ GeV (rysunek zaczerpnięty z P11).



Rysunek 10: Porównanie całkowitego (kolizyjnego+radiacyjnego) oraz kolizyjnego parametru quenchnigu dżetów ($\hat{q}$) dla kwarków powabnych ($m = 1.5$ GeV; $P_{\rm L} = 10$ GeV) w dynamice FP oraz PP ($q_b = 1.10$) w plazmie kwarkowo-gluonowej o temperaturze $T_b = 0.2$ GeV (rysunek zaczerpnięty z P11).

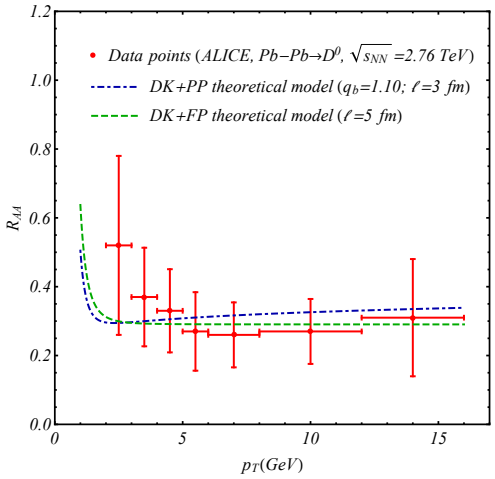
Współczynnik supresji jądrowej $R_{\rm AA}^{\rm h}$ dla ciężkich kwarków (h) może być wyrażony za pomocą $\hat{q}$ [37, 38] (dla długości toru ℓ, stałej sprzężenia α_s oraz czynnika kolorowego C_F) w następującej postaci

$$R_{\rm AA}^{\rm h}(p_{\rm T},\ell) \simeq \exp\left[-\frac{2\alpha_s C_F}{\sqrt{\pi}}\ell\sqrt{\frac{\hat{q}\mathcal{L}_h^{\rm abs}}{p_{\rm T}}} + \frac{16\alpha_s C_F}{9\sqrt{3}}\ell\left(\frac{\hat{q}m^2}{m^2+p_{\rm T}^2}\right)^{1/3}\right]. \tag{87}$$

Jednakże powyższy wzór na $R_{\rm AA}^{\rm h}$ został wyprowadzony z uwzględnieniem procesów radiacyjnych. Radiacyjne współczynniki transportu zostały obliczone zgodnie z [39], a wielkość

$$\mathcal{L}_h^{\rm abs} = |\mathcal{L}_h| = \left|\frac{d}{d\ln p_{\rm T}}\ln\left\{\frac{d\sigma^{\rm vac}}{dp_{\rm T}^2}(p_{\rm T})\right\}\right| \tag{88}$$

(dla którego $\sigma^{\rm vac}$ oznacza przekrój czynny w próżni dla mezonów D) jest obliczany zgodnie z pracami [37, 40].



Rysunek 11: Porównanie współczynnika supresji jądrowej mezonów D^0 dla dynamiki PP oraz FP (rysunek zaczerpnięty z P11) z danymi eksperymentalnymi uzyskanymi przez współpracę ALICE [41].

Z Fig. (11) wynika, że różnica pomiędzy dynamiką Fokkera-Plancka a Plastino-Plastino wynosi około 10–20%. Jednak nieaddytywność nie jest jedynie dodatkiem do istniejącego formalizmu; raczej stawiamy pytanie, czy należy rozważyć rewizję obecnego opisu. Odpowiedź na to pytanie można jednoznaczniej uzyskać poprzez analizę dodatkowych obserwabli, takich jak przepływ eliptyczny, oraz sprawdzenie, czy wspólna wartość parametru q opisuje je wszystkie. Jest to obecnie temat prac w toku.

4.3.6 Podsumowanie i najważniejsze wnioski

W niniejszym zbiorze prac przedstawiono, w jaki sposób uogólnienie klasycznej statystyki Boltzmanna-Gibbsa, oparte na fizycznych scenariuszach dominujących w ośrodku powstającym w zderzeniach wysokoenergetycznych, modyfikuje nasze rozumienie widm cząstek, propagacji nieliniowych fal oraz propagacji cząstek wysokoenergetycznych. Poprzez analizę tych zagadnień otrzymano spójny obraz obejmujący mechanikę statystyczną, teorię kinetyczną, fizykę mikroskopową oraz fenomenologię. Stanowi to krok w kierunku umocnienia uogólnionej statystyki na bardziej fundamentalnych podstawach teoretycznych, w związku z charakterystyką ośrodka kwarkowo-gluonowego.

Najważniejsze osiągnięcia prac są następujące:

- Rozpoczynając od entropii nieaddytywnej, wyprowadzono nowy rozkład Bosego-Einsteina, który opisuje eksperymentalnie obserwowane widma cząstek. Granica tego rozkładu, zbliżona do rozkładu nieaddytywnego stosowanego w wielu badaniach, została wykorzystana do analizy nieaddywnej termodynamiki P1 oraz P2.

- Otrzymano nowe zwarte analityczne wyrażenia nieaddywnych wielkości termodynamicznych, a analiza struktury biegunowej ujawniła górną granicę parametru entropowego q, zależną od wymiaru układu P3 oraz P4.

- Zbadano liniową ewolucję zaburzeń temperatury, a przy użyciu przybliżonych postaci wielkości termodynamicznych przeanalizowano ewolucję fal nieliniowych. Stwierdzono, że choć nieaddytywne równanie stanu prowadzi do rozwiązań z załamaniem fali, wyższa wartość parametru entropowego lub niezerowe pole magnetyczne zwiększają stabilność fal P5, P6 oraz P7.

- Zbadano również odpowiedź ośrodka w kontekście transportu cząstek wysokoenergetycznych P8, P9, P10 oraz P11. Wychodząc od fenomenologii oszacowano różniczkowe straty energii oraz współczynniki transportowe, takie jak parametr quenchnigu dżetów, poprzez uogólnienie obrazu dynamiki Fokkera-Plancka. Wyprowadzono również uogólnioną relację łączącą straty energii i współczynniki transportowe.

Podsumowując, wyniki te ustanawiają statystykę nieaddytywną jako formalizm łączący fenomenologię z mikroskopową dynamiką w plazmie kwarkowo-gluonowej.

4.3.7 Plany na przyszłość

Powiązanie fenomenologicznych rozkładów nieaddytywnych z formalizmami teoretycznymi, takimi jak mechanika statystyczna oraz podejście transportowe, pozostaje wciąż aktywnym obszarem badań. Nierozstrzygnięte pozostaje również, w jaki sposób kwantowe rozkłady, takie jak otrzymany w P1, wiążą się z kwantową teorią pola. Istotnym kolejnym krokiem jest znalezienie numerycznego rozwiązania równania Plastino-Plastino, tak aby możliwe było jednoczesne badanie obserwabli eksperymentalnych, takich jak supresja jądrowa oraz przepływ eliptyczny. Tego rodzaju podejście pozwoli zbadać, czy istnieje uniwersalna wartość parametru entropowego opisująca te obserwable. Kolejnym interesującym zagadnieniem jest odpowiedź ośrodka na przejście wysokoenergetycznych cząstek przez QGP. Inspirując się aerodynamiką, można obliczyć indukowany opór (drag) działający na dżety poprzez wprowadzenie członu źródłowego do równań hydrodynamicznych. Wpływ takiego indukowanego oporu, w połączeniu z tzw. "oporem pasożytniczym" obliczanym z równania Plastino-Plastino, na obserwable eksperymentalne stanowi interesujący kierunek dalszych badań.

Literatura

[1] K. Aamodt *et al.* (ALICE Collaboration) Eur. Phys. J. C **71**, 1655 (2011).

[2] S. Acharya *et al.* (ALICE collaboration), Phys. Rev. C **97**, 024615 (2018).

[3] V. Khachatryan *et al.* (CMS collaboration), Jour. High En. Phys. **05**, 064 (2011).

[4] M. Rybczyński and Z. Włodarczyk, Eur. Phys. J. C **74**, 2785 (2014).

[5] T. Bhattacharyya, J. Cleymans, L. Marques, S. Mogliacci, and M. W. Paradza, J. Phys. G **45** no.5, 055001 (2018).

[6] D.B. Walton and J. Rafelski, Phys. Rev. Lett. **84** 31 (1999).

[7] D. Kincses, M. Nagy, and M. Csańad, Communications Physics **8**, 55 (2025).

[8] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).

[9] S. Abe, Phys. Lett. A **271**, 74 (2000).

[10] R.J.V. dos Santos, J. Math. Phys. **38**, 4104 (1997).

[11] C.E. Shannon, Bell Syst. Tech. J. **27**, 379 (1948).

[12] A.I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory*; Silverman, R.A., Friedman, M.D., Translators; Dover: New York, NY, USA (1957).

[13] T. Bhattacharyya and A. S. Parvan, Eur. Phys. Jour. A **57**, 206 (2021).

[14] T. Osada and G. Wilk, Phys. Rev. C **77**, 044903 (2009).

[15] G. Wilk and Z. Włodarczyk, Phys. Rev. Lett. **84**, 2770 (2000).

[16] A. Deppman, E. Megías, and D. P. Menezes, Phys. Rev. D **101** 034019 (2020).

[17] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, New York: Krieger (1981).

[18] R. N. Patra, B. Mohanty, and T. K. Nayak, Eur. Phys. J. Plus **136**, 702 (2021).

[19] M. D. Azmi, T. Bhattacharyya, J. Cleymans and M. W. Paradza, J. Phys. G **47**, 045001 (2020).

[20] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, California, USA (2003)

[21] G. Sarwar, M. Hasanujjaman, T. Bhattacharyya, M. Rahaman, A. Bhattacharyya, and J. e. Alam, Eur. Phys. J. C **82**, no.3, 189 (2022).

[22] R. Baier and P. Romatschke Eur. Phys. Jour. C **51**, 677 (2007).

[23] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, (1972).

[24] G. N. Fowler, S. Raha, N. Stelte, and R.M. Weiner, Phys. Lett. B **115**, 286 (1982).

[25] D. A. Fogaça, L. G. Ferreira Filho, and F. S. Navarra, Phys. Rev. C **81**, 055211 (2010).

[26] A. Nemtinova, praca magisterska pt. "Nonadditive statistics in high-energy collisions and its application," Ural Federal University, Jekaterynburg, Rosja, obroniona 11 czerwca 2024 r., pod kierunkiem T. Bhattacharyya.

[27] R. A. Kraenkel, M. A. Manna, J. C. Montero and J. G. Pereira, arXiv: patt-sol/9509003.

[28] Victor Roy, Shi Pu, Luciano Rezzolla, and Dirk Rischke, Phys. Lett. B 750, **45** (2015)

[29] M. Rybczyński, G. Wilk, and Z. Włodarczyk, Phys. Rev. D **103**, 114026 (2021).

[30] A. Lavagno, Phys. Lett. A **301**, 13 (2002).

[31] T.S. Biro and E. Molnar, Phys. Rev. C **85**, 024905 (2012).

[32] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. New York: Dover (1972).

[33] NA61/SHINE Collaboration, A. Aduszkiewicz et al., Eur. Phys. Jour. C **77**, 671 (2017).

[34] NA49 Collaboration, S. V. Afanasiev et al., Phys. Rev. C **66**, 054902 (2002).

[35] NA49 Collaboration, C. Alt et al., Phys. Rev. C **77**, 024903 (2008).

[36] T. Song, I. Grishmanovskii, and O. Soloveva, Phys. Rev. D **107**, 036009 (2023).

[37] Y. L. Dokshitzer, and D. E. Kharzeev, Phys. Lett. B **519**, 199 (2001).

[38] R. A. Lacey *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 142302 (2009).

[39] S. Mazumder, T. Bhattacharyya, and J.-e Alam, Phys. Rev. D **89**, 014002 (2014).

[40] C.A. Alves *et al.*, E769 Collaboration, Phys. Rev. Lett. **77** 2392 (1996).

[41] B. Abelev *et al.*, The ALICE Collaboration, Jour. of High En. Phys. **09**, 112 (2012).

5 Prezentacja istotnej działalności naukowej

Po uzyskaniu stopnia doktora w Variable Energy Cyclotron Centre (VECC) w Kalkucie, Indie, dołączyłem do Indian Institute of Technology Indore (IITI) jako naukowiec wizytujący, a następnie jako stypendysta podoktorski. Pracowałem również na University of Cape Town (UCT), Republika Południowej Afryki, jako stypendysta podoktorski. Byłem afiliowanym naukowcem wizytującym na University of Michigan (UMich) w Ann Arbor, USA, a także pracowałem jako starszy pracownik naukowy w Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (JINR), Dubna, Rosja. Obecnie pracuję jako adiunkt na Uniwersytecie Jana Kochanowskiego w Kielcach (UJK), Polska.

Działalność naukowa w instytucjach międzynarodowych poza Polską jest opisana poniżej.

Działalność w JINR, Rosja: W czasie pracy w JINR opracowałem interdyscyplinarny program badawczy łączący nieaddytywną mechanikę statystyczną z fizyką jądrową wysokich energii. Moje badania koncentrowały się na trzech głównych kierunkach: (i) wyprowadzeniu nieaddytywnych funkcji rozkładu z maksymalizacji entropii dla układów klasycznych i kwantowych oraz ich zastosowaniu do opisu widm cząstek w zderzeniach wysokoenergetycznych; (ii) badaniu liniowych i nieliniowych zaburzeń w idealnej i lepkiej plazmie kwarkowo-gluonowej, w tym roli nieaddytywnych równań stanu w stabilności fal; oraz (iii) sformułowaniu kinetycznego opisu transportu cząstek wysokoenergetycznych w plazmie kwarkowo-gluonowej, prowadzącego do obliczeń współczynników transportu, takich jak opór, dyfuzja oraz parametr jet quenching, oraz ich związku z obserwablami, takimi jak czynnik supresji jądrowej. Opracowany formalizm matematyczny umożliwił również eksploracyjne zastosowania interdyscyplinarne, w tym badania zachowań typu dyskontowania opóźnionego.

Oprócz badań prowadziłem nadzór nad sześcioma krótkoterminowymi projektami studenckimi w ramach programu INTEREST oraz pracą magisterską dotyczącą nieaddytywnej statystyki w zderzeniach wysokoenergetycznych, która została oceniona najwyższą oceną. Cześć z tych badań zapoczątkowała nowe kierunki badawcze i doprowadziła do publikacji współautorskiej z jednym z uczestników, uwzględnionej w zestawieniu osiągnięć habilitacyjnych (P4). Pełniłem również funkcję sekretarza naukowego warsztatów India–JINR Workshop on Elementary Particle and Nuclear Physics and Condensed Matter Research.

Moja praca obejmowała współpracę z badaczami z Indii, Rosji, Brazylii, Republiki Południowej Afryki oraz Hiszpanii. W tym okresie prezentowałem wyniki badań na konferencjach międzynarodowych oraz uczestniczyłem jako recenzent i redaktor gościnny.

Działalność w UMich, USA: Podczas mojego trzymiesięcznego pobytu na University of Michigan (UMich), USA, rozwijałem kinetyczny formalizm do badania propagacji ciężkich kwarków przez złożone medium QGP. Wygłosiłem trzy wykłady na temat podstaw plazmy kwarkowo-gluonowej oraz zaawansowanych metod jej charakteryzacji z wykorzystaniem statystyki nieaddytywnej, a także zaproszony seminarium z zakresu fizyki HEP/Astro/Nuclear.

Działalność w UCT, Republika Południowej Afryki: W University of Cape Town (UCT), Republika Południowej Afryki, rozwijałem modele teoretyczne do badania implikacji fenomenologicznych statystyki nieaddytywnej. Moje prace w UCT obejmowały: badanie widm poprzecznego pędu oraz czynnika supresji jądrowej z wykorzystaniem statystyki nieaddytywnej, analityczne obliczenia nieaddytywnych zmiennych termodynamicznych oraz propagację ciężkich kwarków w plazmie kwarkowo-gluonowej. Wyniki tych badań były prezentowane na kilku konferencjach krajowych i międzynarodowych i przyczyniły się do rozwoju uogólnionego formalizmu matematycznego badającego pochodzenie rozkładów nieaddytywnych w fizyce wysokich energii.

Działalność w IITI, Indie: W Indian Institute of Technology Indore (IITI), Indie, badałem nieaddytywną termodynamikę oraz wpływ kolektywności na widma cząstek. Ponadto analizowałem ewolucję liniowych zaburzeń w układzie nierównowagowym. Wyniki tych badań były prezentowane na kilku konferencjach krajowych i międzynarodowych. Wstępne studia z tego okresu zainspirowały późniejsze rozwinięcia, obejmujące zamknięte obliczenia analityczne nieaddytywnych wielkości termodynamicznych oraz ewolucję nieliniowych zaburzeń.

Działalność w VECC, Indie: W Variable Energy Cyclotron Centre (VECC), Indie, badałem straty energii wysokoenergetycznych partonów z perspektywy zarówno perturbacyjnej chromodynamiki kwantowej (pQCD), jak i teorii kinetycznej. Jedna z prac wykazała, że stan stacjonarny ciężkich kwarków w plazmie kwarkowo-gluonowej ma postać rozkładu potęgowego, który można parametryzować rozkładem nieaddytywnym, gdy uwzględni się jednocześnie oddziaływania zderzeniowe i radiacyjne. Wynik ten stał się następnie istotny przy sformułowaniu uogólnionego kinetycznego formalizmu opisu strat energii ciężkich kwarków, który został przedstawiony w zestawieniu osiągnięć habilitacyjnych.

Działalność w UJK, Polska: W Uniwersytecie Jana Kochanowskiego w Kielcach (UJK), przy wsparciu grantu Horizon EU, kontynuuję rozwój uogólnionego formalizmu teoretycznego badającego pochodzenie rozkładów nieaddytywnych z mechaniki statystycznej i teorii kinetycznej oraz jego zastosowania w fenomenologii

plazmy kwarkowo-gluonowej i innych zastosowaniach interdyscyplinarnych. Rozwój ten obejmuje kilka kierunków: (i) wyprowadzenie nowego uogólnionego rozkładu Bosego-Einsteina oraz ustalenie jego związku z fenomenologicznym rozkładem nieaddytywnym; (ii) na podstawie rozwiązania uogólnionego równania transportu Boltzmanna w przybliżeniu czasu relaksacji, zaproponowanego w moich wcześniejszych pracach, badanie podłużnej supresji jądrowej, co wskazuje, że piony propagujące w plazmie kwarkowo-gluonowej mogą podlegać anomalii dyfuzji w przestrzeni pędów; (iii) zastosowanie zmodyfikowanego równania kinetycznego w przybliżeniu Landaua, wykazującego anomalną dyfuzję, do badania czynnika supresji jądrowej oraz obserwowanych w nim oscylacji; (iv) badanie stabilności nieliniowych fal propagujących w złożonym ośrodku QGP w obecności pola magnetycznego.
Prace te prezentowałem na różnych konferencjach międzynarodowych (w niektórych jako prelegent plenarny) oraz na kolokwiach organizowanych przez UJK. Organizowałem miniwarsztaty dotyczące zastosowań termodynamiki w fizyce wysokich energii, uczestniczyłem w panelach dyskusyjnych dotyczących złożoności i nieaddytywności, przewodniczyłem sesjom plenarnym i sekcyjnym na konferencjach oraz moderowałem sesje pytań i odpowiedzi.
Pełnię funkcję członka rady redakcyjnej (early career editorial board) czasopisma Universe, redaktora wydania specjalnego poświeconego złożoności w fizyce wysokich energii oraz recenzenta w szeregu renomowanych czasopism naukowych.

6 Prezentacja osiągnięć dydaktycznych i organizacyjnych oraz osiągnięć w zakresie popularyzacji nauki

6.1 Dydaktyka/nadzór

Byłem zaangażowany w opiekę naukową w ramach programu INTEREST w JINR i nadzorowałem sześć krótkoterminowych projektów studenckich. Tematy projektów obejmowały różne zagadnienia, od mechaniki statystycznej, przez kwantową chromodynamikę prózni, po teorię kinetyczną i hydrodynamikę. Nadzorowałem również pracę magisterską dotyczącą nieaddytywnej mechaniki statystycznej w zderzeniach wysokoenergetycznych, która została oceniona najwyższą oceną. W ramach tych aktywności prowadziłem studentów w zakresie formułowania problemów, metod analitycznych oraz pisania prac naukowych. Dodatkowo wygłaszałem seminaria i wykłady dla studentów studiów I i II stopnia, w tym cykl czterech wykładów w ramach warsztatów online organizowanych przez Darjeeling Government College w Indiach, mających na celu wprowadzenie uczestników do narzędzi obliczeniowych z wykorzystaniem Mathematica.

6.2 Osiągnięcia organizacyjne

Byłem aktywnie zaangażowany w organizację wydarzeń naukowych. W szczególności pełniłem funkcję sekretarza naukowego warsztatów India–JINR Workshop on Elementary Particle and Nuclear Physics and Condensed Matter Research, wspierając koordynację programu naukowego oraz komunikację z uczestnikami. Organizowałem również warsztaty dotyczące zastosowań termodynamiki w fizyce wysokich energii podczas konferencji Joint European Thermodynamics w Belgradzie. Pełniłem funkcję przewodniczącego sesji na konferencjach krajowych i międzynarodowych oraz uczestniczyłem jako panelista w dyskusjach naukowych. Wspierałem społeczność naukową jako recenzent dla renomowanych czasopism, takich jak Physics Letters B, Journal of Physics G, European Physical Journal A i innych. Pełnię również funkcję redaktora wydań specjalnych dotyczących statystyki nieaddytywnej i złożoności oraz jestem członkiem rady redakcyjnej (early career editorial board) czasopisma Universe.

6.3 Popularyzacja nauki

Moja działalność obejmuje również upowszechnianie wiedzy naukowej poza środowiskiem specjalistycznym. Wygłaszałem wykłady dotyczące moich badań dla studentów w ramach programu staży badawczych "Accelerate Vigyan" organizowanego przez SERB w IIT Goa. Uczestniczyłem jako zaproszony panelista w Young Scientists' Congress (Soczi) oraz wygłaszałem wykłady typu colloquium w takich ośrodkach jak CFP, ZCSTI (Giza), VECC (Kalkuta), UCT (Kapsztad), IIT Goa (Goa) oraz UJK (Kielce). Prowadziłem również wykłady dotyczące interdyscyplinarnych zastosowań fizyki statystycznej w obszarach wykraczających poza fizykę, takich jak podejmowanie decyzji przez człowieka.

7 Inne informacje

Nagrody i stypendia

- "Seal of Excellence", stypendium Europejskiej Komisji w ramach działań Marie Skłodowska-Curie European Fellowship, 2023
- University of Cape Town-University Research Council Postdoctoral Fellowship, 2016-2018
- Junior i senior research Doctoral Fellowship, 2009-2011, 2011-2014

Zaproszone (poza konferencjami) seminaria oraz zaproszone (konferencyjne) dyskusje panelowe

1. Zaproszony panelista dyskusyjny: 'Complexity: Applications', Workshop on Complexity in High Energy and Statistical Physics, 1-7 Grudzień, 2024, Ettore Majorana Center, Erice, Włochy
2. Prezentacja ustna na temat 'Complexity, High-energy Collisions, and Differential Observables', Institute of Physics, Jan Kochanowski University, Czerwiec 4, 2025, Kielce, Polska
3. Prezentacja ustna na temat 'Prevalence of power laws: from physical to social systems', Institute of Physics, Jan Kochanowski University, Październik 9, 2024, Kielce, Polska
4. Zaproszony wykład 'The ubiquity of power laws: from particle production to human behaviour' w Association for Young Scientists and Specialists, JINR, Luty 2, 2023, Dubna, Rosja
5. Zaproszony panelista dyskusyjny (online): 'Prospects and challenges for International Integration of Infrastructures and Human Capital', Young Scientists' Congress 2022, 1-3 Grudzień, 2022, Sochi, Rosja
6. Zaproszony wykład (online) na temat 'A Journey from the Boltzmann-Gibbs to the Tsallis distribution in high-energy collision physics', Center for Fundamental (CFP) Physics, Zewail City of Science, Technology and Innovation, Maj 26, 2022, Giza, Egipt
7. Seminarium (online) na temat 'Tsallis Quantum Distributions and Propagation of Non-linear waves in Quark-Gluon Plasma' w serii seminariów departamentu Theory of Hadronic Matter under Extreme Conditions, BLTP, JINR, Luty 17, 2021, Rosja
8. Zaproszony wykład (online) na temat 'On the Origin of the Phenomenological Tsallis Distributions and their Applications in High-energy Collision Physics', School of Physical Sciences, Indian Institute of Technology Goa, Grudzień 24, 2020, Indie
9. Seminarium na temat 'Hadronic Transverse Momentum Spectra from the Exact Tsallis Statistics and their Relationship with the Phenomenological Tsallis Distributions' w serii seminariów departamentu Theory of Fundamental Interactions, BLTP, JINR, Maj 23, 2019, Rosja
10. Zaproszony wykład na temat 'Non-extensive Drag and Diffusion coefficients of the Heavy Quarks travelling through a non-Abelian Plasma' w Variable Energy Cyclotron Centre, Luty 5, 2019, Indie
11. Seminarium na temat 'Non-extensive Statistics in High Energy Physics' w serii seminariów: 'Theory of Hadronic Matter under Extreme Conditions', BLTP, JINR, Lipiec 9, 2018, Rosja
12. Zaproszony HEP/Astro/Nuclear Seminar na temat 'Characterizing the hot and dense nuclear Matter using temperature fluctuation' na University of Michigan, Ann Arbor, Marzec 26, 2018, USA
13. Seminarium na temat 'Quark-Gluon Plasma: how do we characterize it?', Centre for Theoretical and Mathematical Physics Seminar, University of Cape Town, Marzec 4, 2016, Republika Południowej Afryki
14. Seminarium na temat 'A Random Walk through the Quark-Gluon Plasma', Centre for Theoretical and Mathematical Physics Seminar, University of Cape Town, Luty 26, 2016, Republika Południowej Afryki

Trambak Bhattacharyya

(podpis wnioskodawcy)